$$A = \left\{ 2^{2-n} \quad : \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \dots \\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{array} \right\}$$

questa è una funzione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

$$f(n) = 2^{2-n}$$

n	1	2	3	4	5	...	n
$f(n)$	$2^{2-1} = 2^1 = 2$	$2^{2-2} = 2^0 = 1$	$2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$2^{2-5} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$		$\frac{4}{2^n}$

$$A = \left\{ 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-2}}, \dots \right\}$$

$\operatorname{Sup} A = 2 \in A \quad \Rightarrow \quad 2 = \operatorname{Max} A$

$\frac{1}{2^{n-2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0$ è un minorante di A e il più grande

$\Rightarrow \quad \operatorname{Inf} A = 0$

a è MINORANTE di b $\quad (a, b \in \mathbb{R})$ se

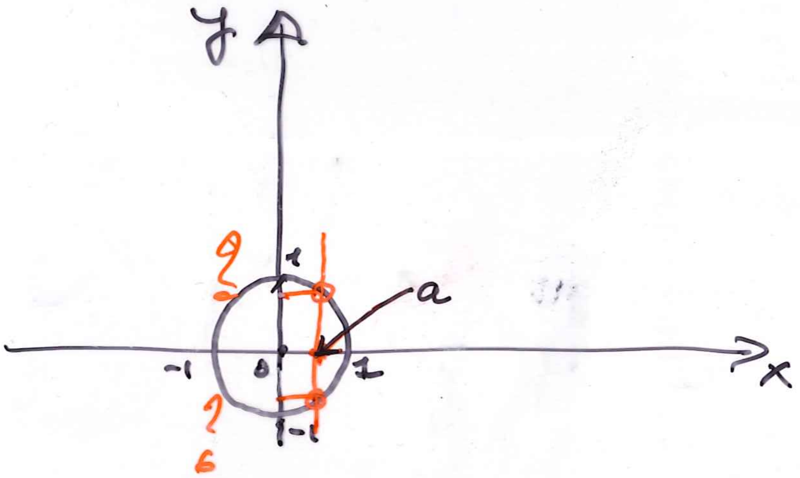
$$a \leq b$$

Funzione $\quad f: A \to B$

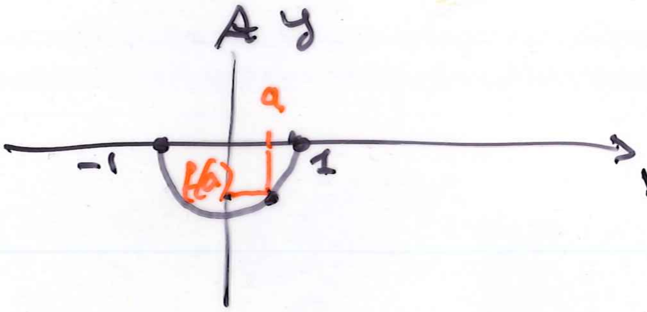
$A \subseteq \mathbb{R} \qquad B \subseteq \mathbb{R}$

la legge f deve essere <u>univoca</u>
cioè

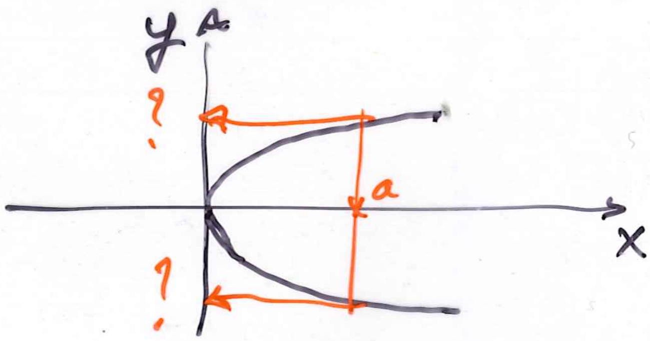
$\forall\, a \in A$ esiste 1 e 1 solo corrispondente b in B



Questa curva non rappresenta il grafico di 1 funzione poiché ci sono punti di $[-1, 1]$ che hanno 2 corrispondenti



Questa sì!



$x = y^2$

Per verificare se una legge è UNIVOCA interseco il "grafico" con rette parallele all'asse delle variabili DIPENDENTI (y): deve esserci sempre 1 SOLA INTERS.

Dico che una corrispondenza

$$f: \underset{\mathbb{R}}{\overset{A}{\cap\!\!|}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\overset{B}{\cap\!\!|}}$$

è biunivoca se

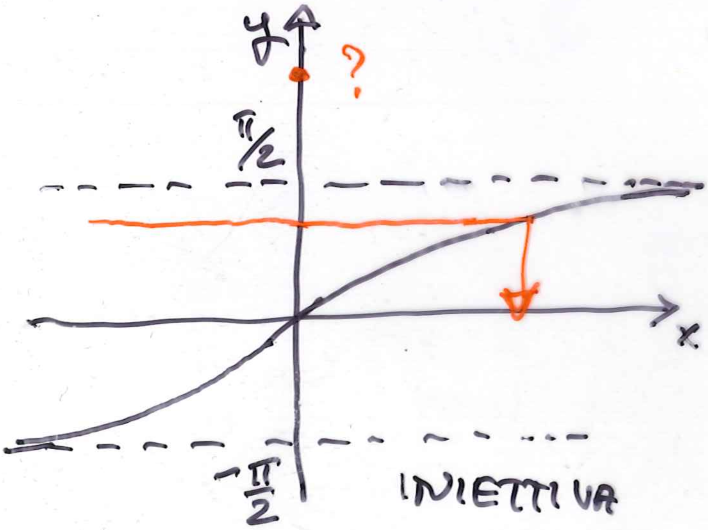
1) è univoca
2) è INIETTIVA IN (vedi sotto)
3) è SURIETTIVA SU (vedi sotto)

2) per ogni coppia di elementi $a_1, a_2 \in A$ se $a_1 \neq a_2$ allora $f(a_1) \neq f(a_2)$

Cioè

Se $f(a_1) = f(a_2)$ allora $a_1 = a_2$

3) per ogni elemento $b \in B$ esiste $a \in A$ t.c. $f(a) = b$.

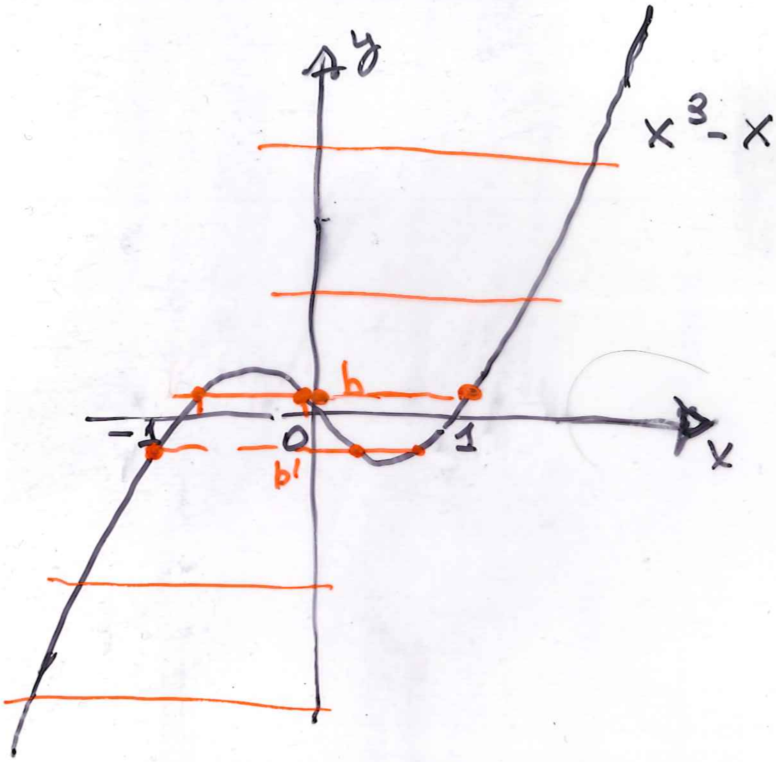


INIETTIVA

non SU

Negli esempi grafici che riportiamo pensiamo

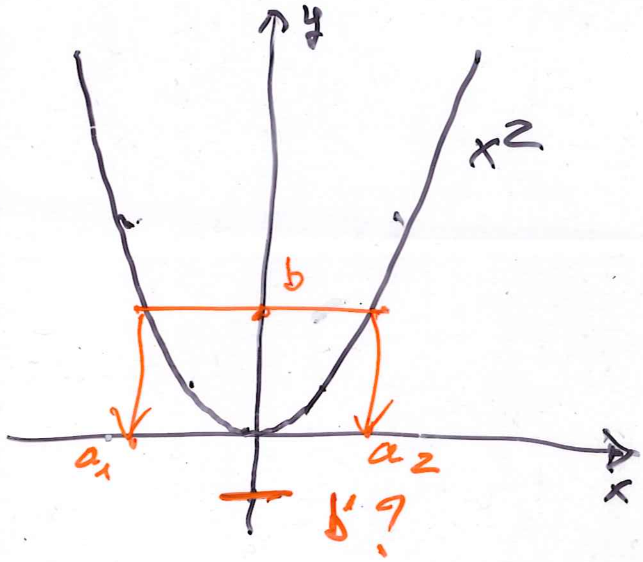
$A = \mathbb{R} = B$

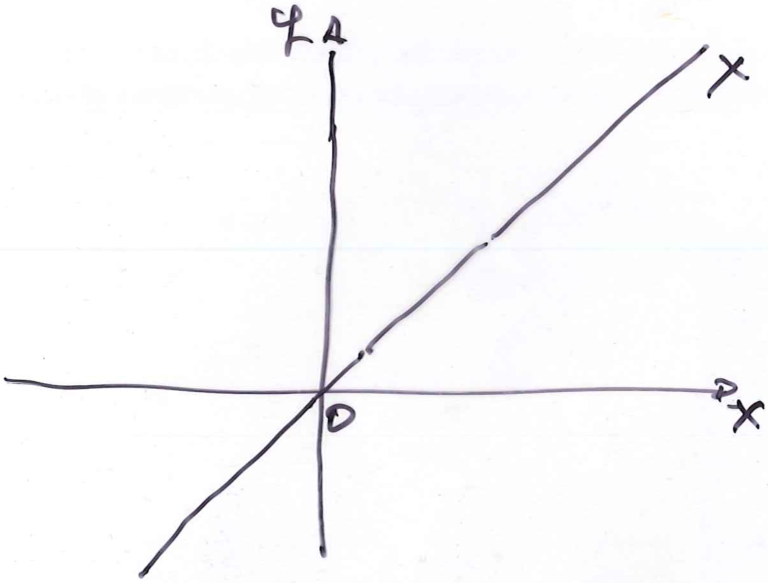


$A = B = \mathbb{R}$

Suriettiva
NON INETTIVA

NÉ INIETTIVA
NÉ SURIETTIVA





INIETTIVA E
SURIETTIVA

BIUNIVOCA
(è l'identità!)

PER VERIFICARE iniettività e suriettività uso rette parallele all'asse delle variabili indipendenti (x):
la funz. è <u>iniettiva</u> se ciascuna di queste ha AL PIÙ una intersezione col grafico
la funz. è <u>suriettiva</u> se ciascuna di queste ha ALMENO una intersez. col grafico.

Definizione di potenza con esponente intero.

Sia $n \in \mathbb{N}$. Definisco potenza di base $a \in \mathbb{R}$ con esponente n

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a & \text{se } n = 1 \\ a(a^{n-1}) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Non è definito } 0^0}$

PROPRIETÀ

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(se voglio che $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$ devo porre $a^0 = 1$)

2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\quad [(2^2)^3 = \dots]$

4) $\left.\begin{matrix} 0 < a < 1 \\ n > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 < a^n < a$

$a > 1 \quad n > 1 \Rightarrow a^n > a$

5) $n > m$ $\quad a^n > a^m$ se $a > 1$

$a^n < a^m$ se $0 < a < 1$

6) $0 < a < b$ $\quad a^n < b^n$

$0 < a < b \quad \Rightarrow \quad a^2 < b^2$

$\Downarrow$

$a \cdot a < a \cdot b$ (per a)

$a \cdot b < b \cdot b$ (per b)

$\xrightarrow{\text{propr. transitiva}} \quad a^2 < b^2$

Invece definisco potenza con esponente intero negativo $-n$, $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ e base $a \in \boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

PERCHÉ? VOGLIO CHE LA DEF. RISPETTI LE LEGGI CHE HO VISTO per gli esponenti $\in \mathbb{N}$:

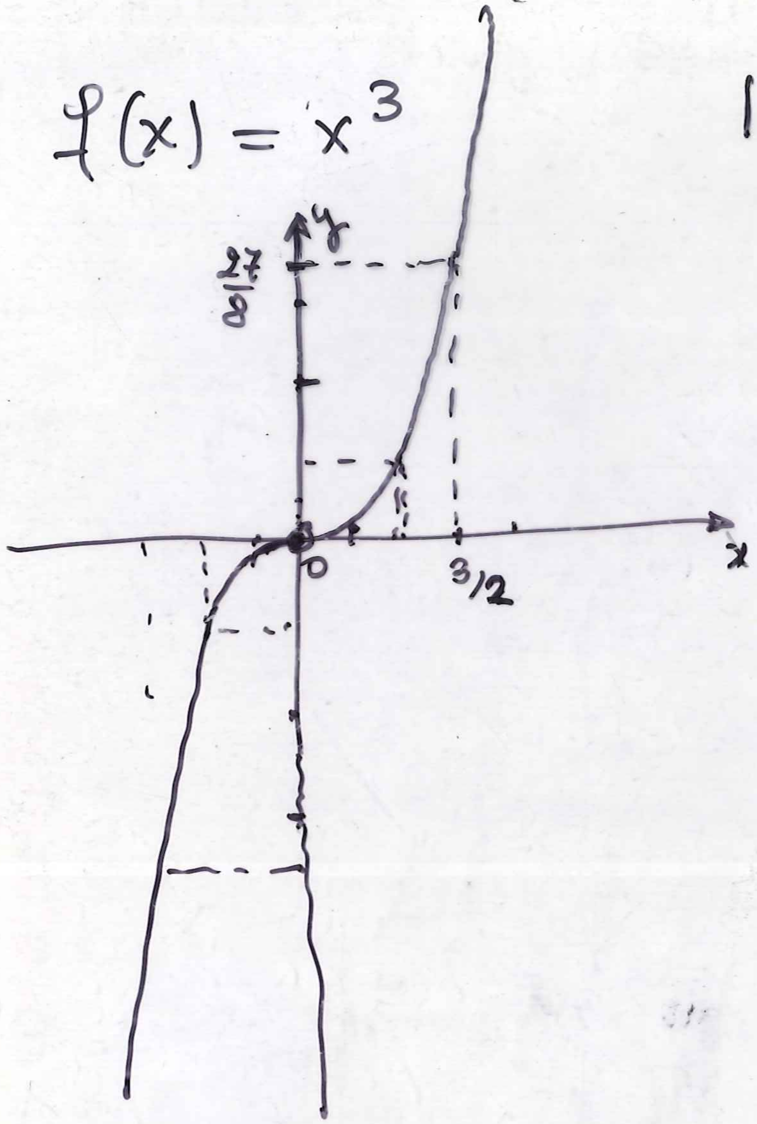
$$a \cdot a^{-1} = a^1 \cdot a^{-1} \underset{\text{VOGLIO CHE SIA}}{=} a^0 = 1$$

$\Rightarrow \quad a \cdot a^{-1} = 1 \quad$ cioè $\quad a^{-1} = \frac{1}{a}$

Valgono le stesse proprietà viste sopra tranne quelle sull'ordinamento in cui devo cambiare il verso

$\left(a \mapsto \frac{1}{a} \right)$

$f(x) = x^3$



I.D. $\mathbb{R} = A$

$f(A) = \mathbb{R}$

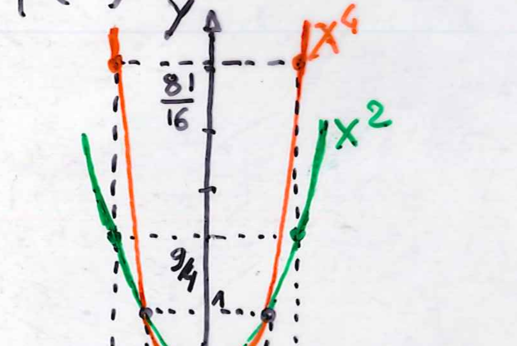
x	$f(x)$
0	0
1	1
$1/2$	$1/8$
2	8
$3/2$	$\frac{27}{8} = 3 + \frac{3}{8}$
-1	-1
$-1/2$	$-1/8$
$-3/2$	$-3 - \frac{3}{8}$

Figura simmetrica rispetto all'origine poiché $f(-x) = -f(x)$

(f è BIUNIVOCA)

Più in generale

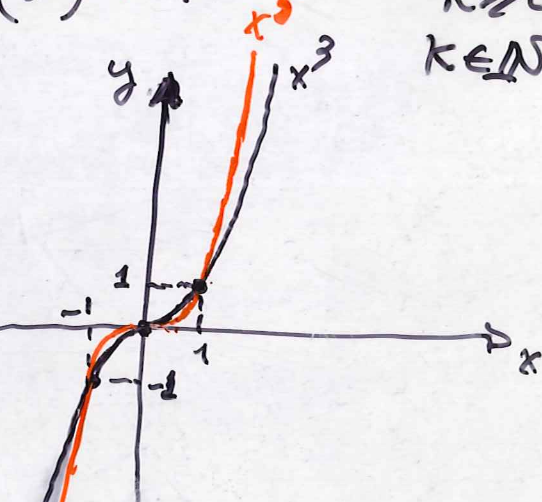
$f(x) = x^{2k}$



$f(-x) = f(x) \Rightarrow$

grafico simmetrico rispetto all'asse y

$f(x) = x^{2k+1}$ $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$



$f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ grafico simmetrico rispetto all'origine

DEFINIZIONE. Dico che una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è <u>pari</u>

$A \subseteq \mathbb{R}$

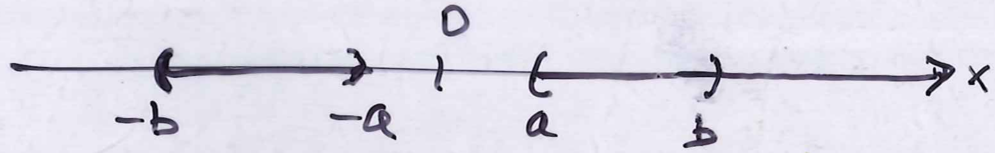
se $\forall x \in A$ si ha $f(-x) = f(x)$

dico che è <u>dispari</u> se $\forall x \in A$ si ha $f(-x) = -f(x)$

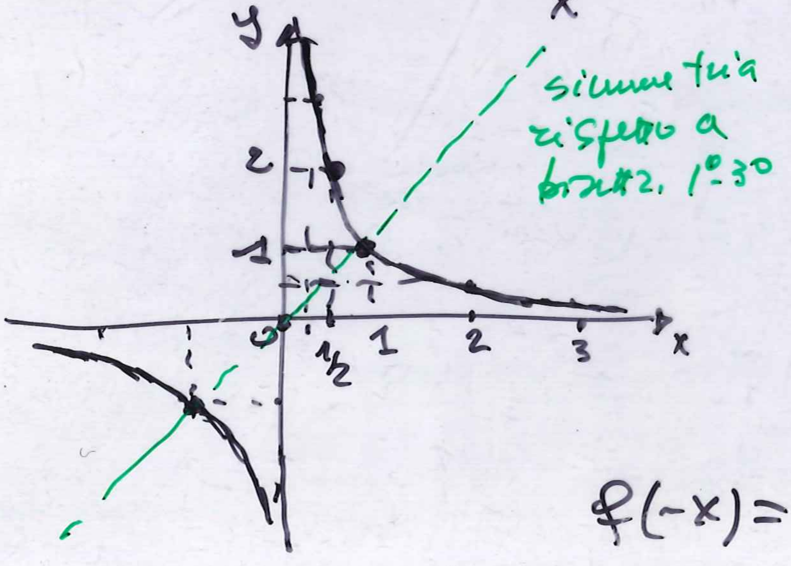
C'È UN SOTTOINTESO

L'insieme di definizione è sempre simmetrico rispetto all'origine e quindi se $x \in A$ anche $-x \in A$!

ES:



$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$



I.D. $\mathbb{R} \setminus \{0\} = A$

$f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = \frac{1}{x}$ risolvo rispetto a x:

$x = \frac{1}{y}$ $\exists, \forall y \neq 0$

È dispari? Sì

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

ES. Arg 2

2.1 $\longrightarrow$ 2.4

ES Arg 1

1.11 $\longrightarrow$ 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$