DEFINIZIONI : funzioni MONOTONE

Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

(a potrebbe essere $-\infty$,
b " " $+\infty$)

(l'intervallo di def. può essere anche chiuso o semichiuso l'importante che sia 1 SOLO INTERVALLO)

Dico che la funzione f è

1) MONOTONA (strettamente) CRESCENTE (su (a,b)) se per ogni coppia di elementi $x_1, x_2 \in (a,b)$ si ha che se

$$x_1 < x_2 \quad \text{allora} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

2) MONOTONA NON DECRESCENTE su (a,b) se per ogni coppia di el. $x_1, x_2 \in (a,b)$ si ha

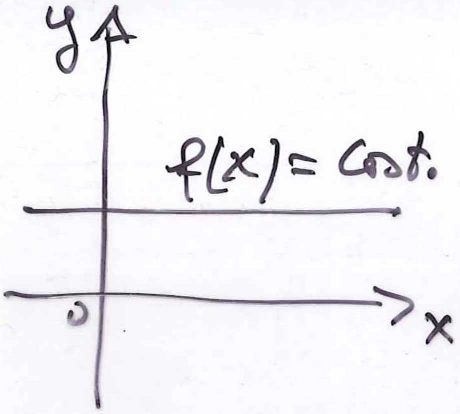
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

3) MONOTONA (strett.) DECRESCENTE su (a,b) se $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ si ha

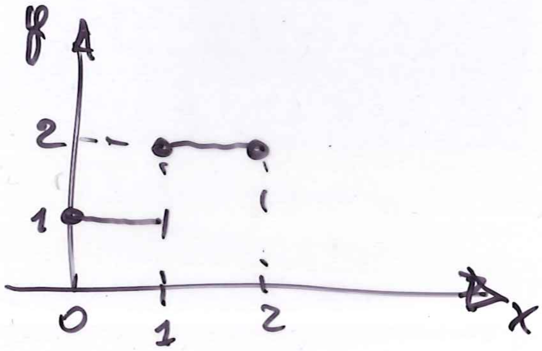
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

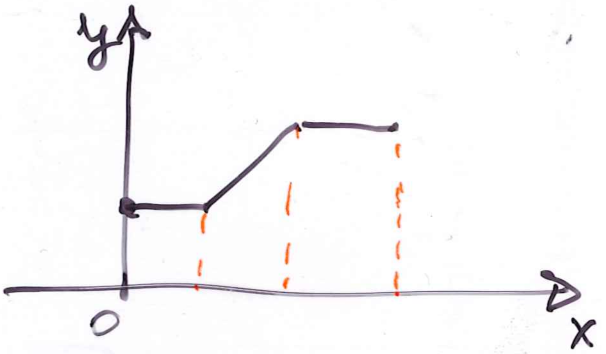
4) MONOTONA NON CRESCENTE su (a,b) se $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ si ha

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

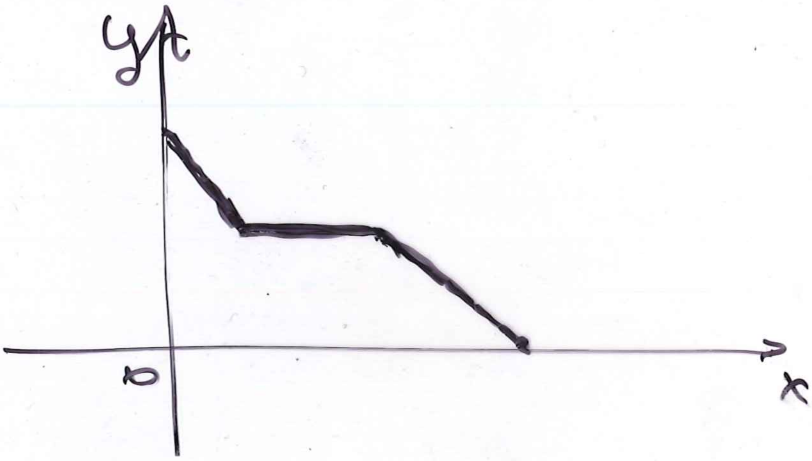


funz non decrescente
(è anche non crescente)





non decresc.



non crescente

A proposito della suriettività di x^{2k+1} (su $\mathbb{R}$) e della suriettività di x^{2k} su $[0,+\infty)$. $(k \in \mathbb{N}\cup\{0\})$

(1) dire che $y = x^{2k+1}$ è suriettiva su $\mathbb{R}$ significa che $\forall \bar{y} \in \mathbb{R}$ esiste un $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bar{y} = \bar{x}^{2k+1}$$

cioè l'equazione $x^{2k+1} = \bar{y}$ ha soluzione $\forall \bar{y} \in \mathbb{R}$:

La completezza dei numeri reali garantisce che $\forall a \in \mathbb{R}$ $a>0$ esiste la soluz. dell'eq.

$$x^{2k+1} = a: \qquad x =: \sqrt[2k+1]{a}$$

radice aritmetica

Se prendo $\bar{y} = a > 0$ ok.

" " $\bar{y} = 0 \Rightarrow x = 0$

Se prendo $\boxed{\bar{y} < 0}$ considero $a = |\bar{y}| > 0$

Allora il teor. di esistenza delle radici n-esime aritmetiche (che discende dalla COMPLETEZZA) dice che

$$x^{2k+1} = |\bar{y}|$$

ha 1 e 1 sola soluz. reale > 0

$$\bar{x} = \sqrt[2k+1]{|\bar{y}|}$$

Prendo $x = -\bar{x} = -\sqrt[2k+1]{|\bar{y}|}$

Allora

$$x^{2k+1} = \left(-\sqrt[2k+1]{|\bar{y}|}\right)^{2k+1} = -|\bar{y}| = \bar{y}$$

2) $y = x^{2k}$ è suriettiva su $[0, +\infty)$
$= (x^2)^k$ ($\Rightarrow$ sicuramente ≥ 0)

Il teor. di esistenza delle radici n-esime aritmetiche dice che esiste 1 e 1 sol. numero reale > 0 tale che l'equaz.

$$x^{2k} = \bar{y} \quad (\bar{y} > 0)$$

abbia soluzione: $\bar{x} =: \sqrt[2k]{\bar{y}}$

Se $\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$

Ma l'equazione

$$x^{2k} = \bar{y} \quad (\bar{y} \geq 0)$$

ha 1 sola soluzione?

No: oltre a quella positiva ha la sua opposta:

$$x_2 = -\sqrt[2k]{\bar{y}}$$

Conclusioni sulle funzioni x^n $\quad n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

Si tratta: se n <u>è dispari</u> di funzioni monotone crescenti, biunivoche tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$; se n <u>è pari</u> di funzioni monotone crescenti in $[0, +\infty)$ (e suriettive su $[0, +\infty)$) e monotone decrescenti in $(-\infty, 0)$ (e suriettive su $(0, +\infty)$).

Sulle funzioni potenza con esponente negativo: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

Sono definite negli intervalli
$(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$

$n = 2k+1$.

È vero che $\forall \bar{y} \neq 0 \ \exists \bar{x}$ t.c. $\bar{x}^{-n} = \bar{y}$?

è come chiedere che esista $\bar{x}$ per cui

$$\bar{x}^n = \frac{1}{\bar{y}} \in \mathbb{R}$$

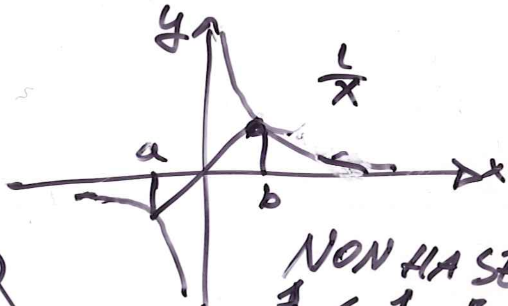
L'abbiamo appena visto!

$\Rightarrow$ sono funz. suriettive su
$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Circa la monotonia posso dire che ciascuna di esse è monotona decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

$n = 2k$

È vero che $\forall \bar{y} \in (0, +\infty)$ esiste un $\bar{x}$ t.c. $\bar{x}^{-n} = \bar{y}$?

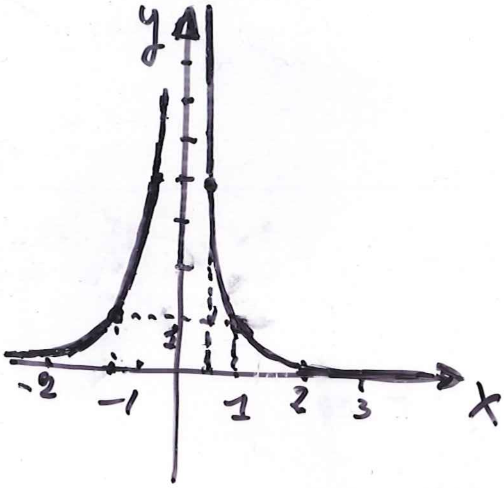


NON HA SENSO: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$!

Sì perché questo equivale a cercare

$\bar{x}^n = \frac{1}{\bar{y}}$ con $\frac{1}{\bar{y}} > 0$ ($\Rightarrow$ 2 soluz. di segno opposto)

Sono suriettive su $(0, +\infty)$. Sono decrescenti in $(0, +\infty)$ e crescenti in $(-\infty, 0)$



$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

x	$1/2$	$1/3$	2	3
$f(x)$	4	9	$1/4$	$1/9$

pari $\Rightarrow$ simmetria risp. all'asse y.

Adesso introduciamo delle operazioni tra funzioni

COMPOSIZIONE di funzioni

$\downarrow$

NEUTRO ?

$\downarrow$

funz. INVERSA

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $g(x) = x+1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3) = x^3 + 1$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$$

COMPOSIZIONE DI 2 FUNZIONI

Vedi ESEMPI 8 - 11 BIS

$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$

$g: B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in A$$

Se $C \neq A$, $f \circ g$ è un NONSENSO

Se $C = A$ può essere $f \circ g \neq g \circ f$

ESEMPIO: $f(x) = |x|$ $\qquad g(x) = x+1$

Se $C = A$ e $\begin{cases} g \circ f(x) = x & \forall x \in A \\ f \circ g(y) = y & \forall y \in B \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd}$$

si dice che f è invertibile e che g è la sua inversa
(NOTAZIONE: $g =: f^{-1}$)

ESEMPI

$f(x) = x^2$, $A = [0, +\infty)$ $\quad B =$ $\qquad$, $f^{-1}(y) =$

$\qquad A = (-\infty, 0)$ $\quad B =$ $\qquad$, $f^{-1}(y) =$

$f(x) = x^3$

Qual è la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

t.c. si abbia $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = g(x)$ e $f \circ g(x) = g(x)$?

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $

$f(g(x)) = g(x)$

se deve essere vera per ogni funz. g lo è per $g(x) = x \Rightarrow$ è $f(x) = x$:

FUNZIONE IDENTITÀ

Soddisfa anche la 1ª uguaglianza poiché se $f(x) = x$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x)$

Quindi la funzione $f(x) = x$ si comporta come elemento neutro nella composizione: la denoto con $id(\,)$ e $id(x) = x \quad \forall x$

Sia $f: A \to B$

Sia $C = A$. Cerco se esiste una funzione $g: C \to A$ t.c.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_A"'] & B \arrow[r, "g"] & A
\end{tikzcd}
$$

cioè $\forall a \in A \quad g(f(a)) = a$

e

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

cioè $\forall b \in B \quad f(g(b)) = b$

Se esiste dico che f è una funz. invertibile e che g è la funz. inversa di f: f^{-1}.

$f(x) = x$ è invertibile?

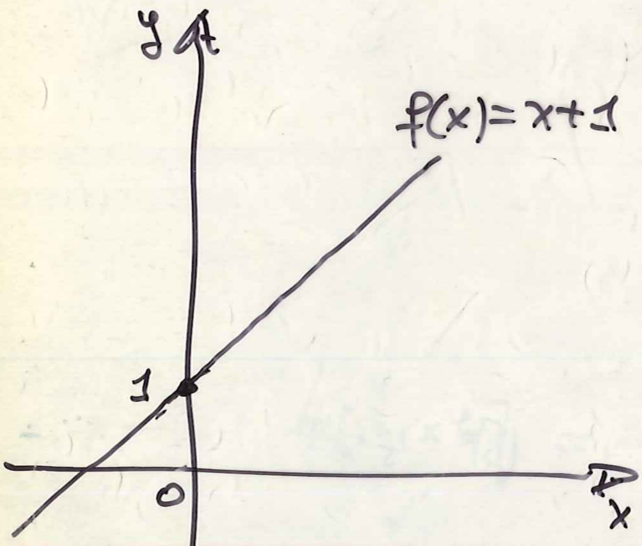
Sì e coincide con la sua inversa

$f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ è invertibile?

$y = \frac{1}{x}$: $x = \frac{1}{y}$ è l'inversa (e coincide con la funz. di partenza)

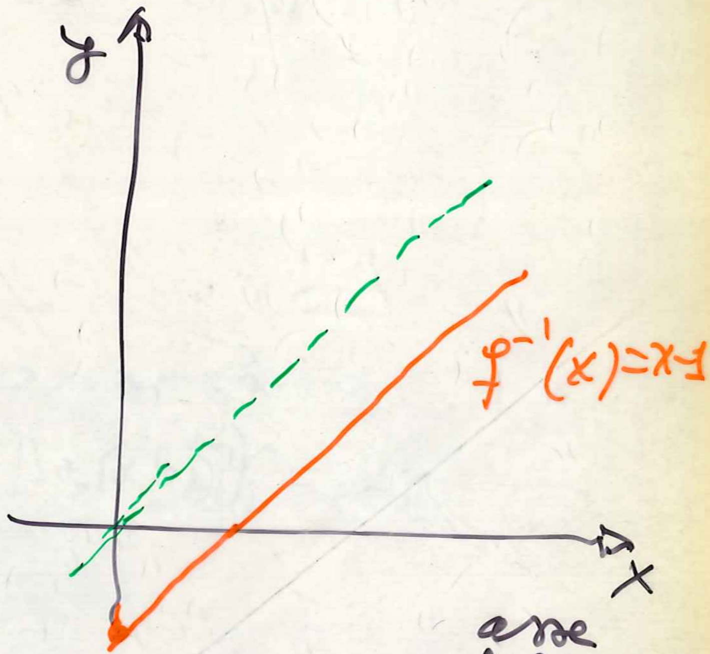
$f(x) = x + 1$ Ha inversa e qual è la sua legge?

$y = x + 1$ risolvo rispetto a x : $x = y - 1$



$f^{-1}(y) = y - 1$

y: asse delle variabili indipendenti $\Rightarrow$ stesso grafico



asse delle variab. indip.

Ogni funz. strettamente monotona è iniettiva.

TEOREMA. $f: A \to B$ è invertibile
$A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

se e solo se è biunivoca tra A e B.

Dim. Se f è invertibile allora

1) è iniettiva: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow$ se fosse $f(a_1) = f(a_2)$
applicando a entrambi i membri l'inversa
otterrei $\underbrace{f^{-1} \circ f(a_1)}_{= a_1} = \underbrace{f^{-1} \circ f(a_2)}_{= a_2}$

2) è suriettiva poiché se $b \in B$, $f^{-1}(b) \in A$ e
$f \circ f^{-1}(b) = b$ cioè $f(f^{-1}(b)) = b$
cioè b proviene da $a = f^{-1}(b)$

Viceversa se è biunivoca posso definire
$f^{-1}: B \to A$ t.c. $f^{-1}(f(a)) = a \quad \forall a \in A$
$f(f^{-1}(b)) = b \quad \forall b \in B$.

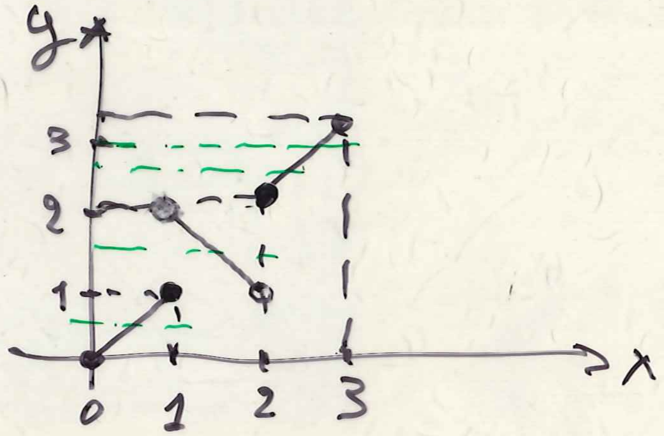
Ogni $b \in B$ proviene da 1 solo $a \in A$ (INIETT)
e è immagine di almeno una a (SUR)

Quindi a b posso associare questo unico elemento a da cui proviene

$$g : b \longmapsto a$$

Ovvio che $g \circ f(a) = a \qquad f \circ g(b) = b$

Esistono funzioni biunivoche non monotone (strettamente)



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 3-x & \text{se } x \in (1,2) \\ x & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$