$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 + 3x - 1$

Quali dei seguenti punti appartengono a $G(f)$?

$(-1,3)$, $(-2,-11)$, $(0,-1)$, $(1,3)$

$(-1,3) \in G(f) \iff f(-1) = 3$ NO: perché $f(-1) = 1 - 3 - 1 = -3$

$(-2,-11) \in G(f) \iff f(-2) = -11$ NO: $f(-2) = 4 - 6 - 1 = -3$

$(0,-1) \in G(f) \iff f(0) = -1$ SÌ

$(1,3) \in G(f) \iff f(1) = 3$ SÌ

$f(1) = 1 + 3 - 1 = 3$

OPPURE!

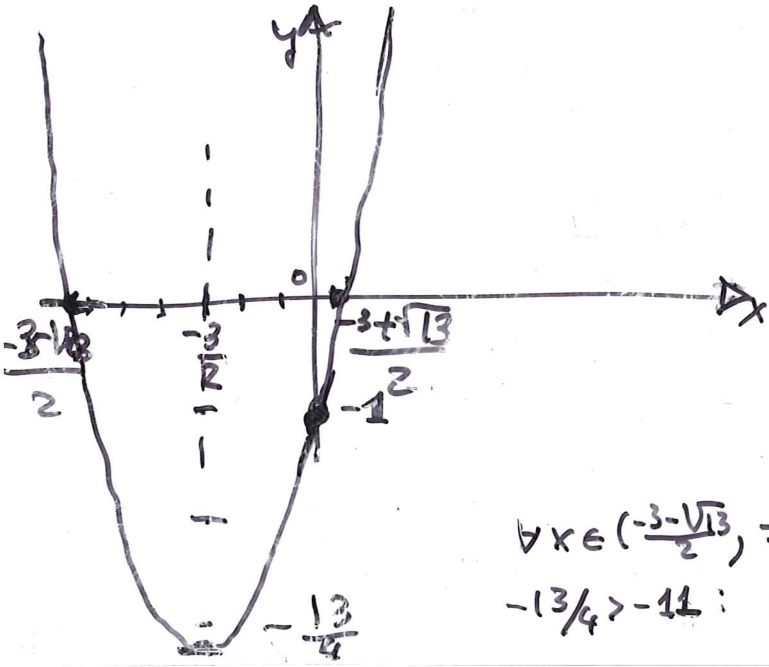
Traccio il grafico della funzione cioè la parabola di eq.:

$y = x^2 + 3x - 1$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \qquad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

asse di simmetria

$x = -\frac{3}{2}$



convessa perché il coeff. di x^2 è >0

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 1 = -\frac{13}{4}$

$\forall x \in \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\ f(x) < 0 \Rightarrow (-1,3) \notin G(f)$

$-13/4 > -11$: il secondo punto non $\in G(f)$

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$

Comporre f con una <u>dilatazione</u> $d(x) = Kx$
con $K \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

$$d \circ f(x) = d(f(x)) = k f(x)$$

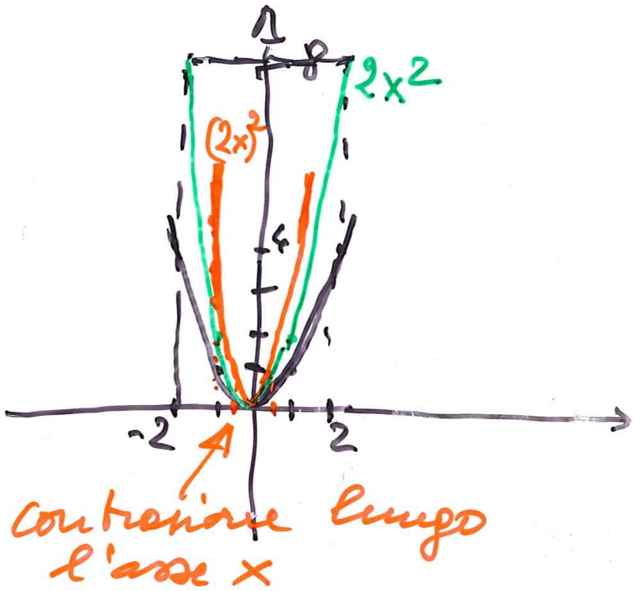
$$\mathbb{R} \xrightarrow{d} \mathbb{R}$$
$$(a,b) \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}$$

Event. restringere dominio di $d(x)$

$$f \circ d(x) = f(Kx)$$

$k = 2 \qquad f(x) = x^2$

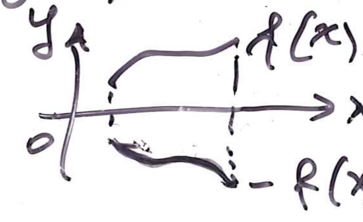
$$d \circ f(x) = 2(x^2) = 2x^2$$
$$f \circ d(x) = (2x)^2 = 4x^2$$



Applicare prima $f(x)$ e poi la dilatazione vuol dire dilatare di un fattore k il grafico lungo l'asse y.
Applicare prima la dilatazione e poi $f(x)$ vuol dire dilatare di un fattore $\frac{1}{k}$ il grafico lungo l'asse x.

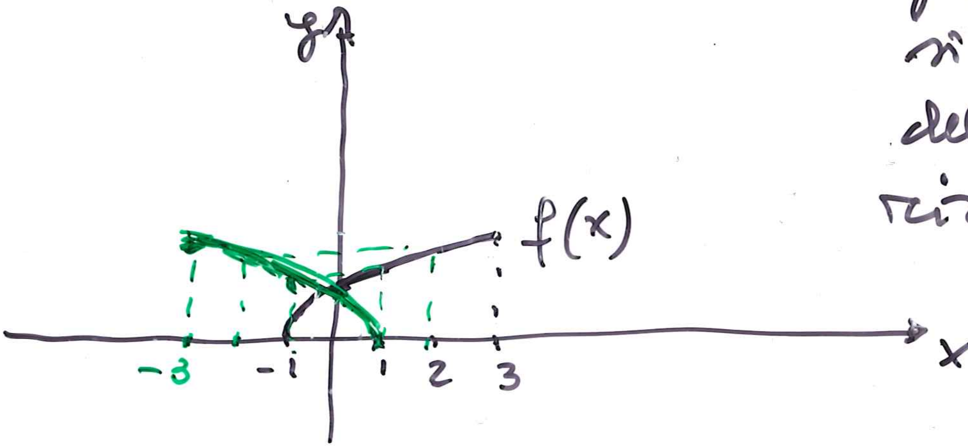
Comporre $f(x)$ con $g(x) = -x$

$$g \circ f(x) = -f(x)$$
Simmetria rispetto asse x



$f\circ(g(x)) = f(-x)$

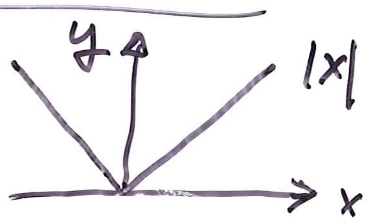
grafico simmetrico del precedente rispetto all'asse y



$f: [-1, 3] \longrightarrow [0, 2]$

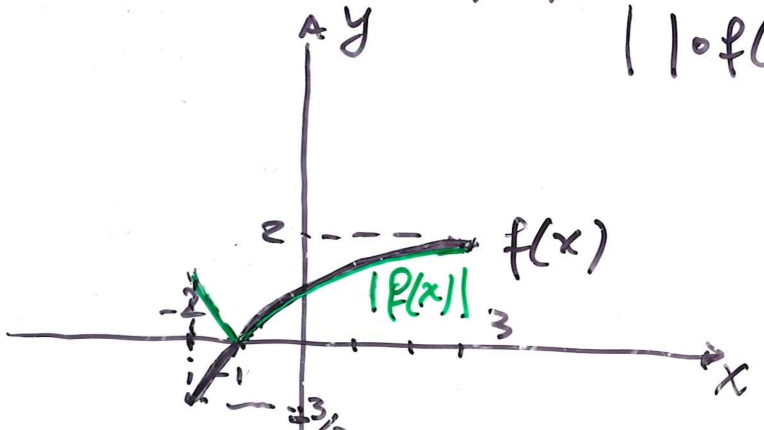
$x \in [-1, 3] \Rightarrow -x \in [-3, +1]$: quindi cambia il dominio!

$g(x) = |x|$



$f(x)$. Sia ad es. $f: [-2, 3] \to [-3/2, 2]$ definita come si vede nel grafico nero sottostante

$|\ |\circ f(x) = |f(x)| = ?$



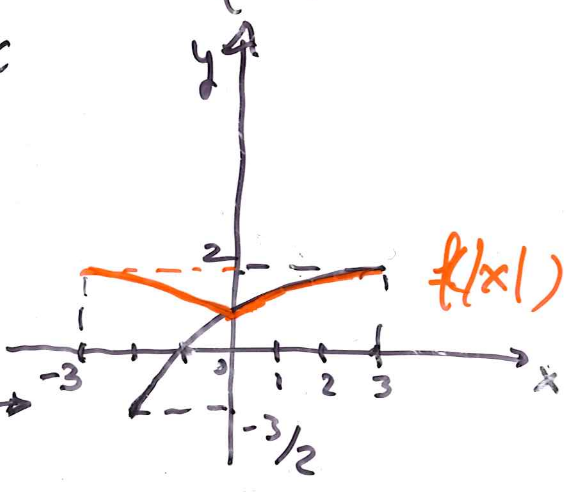
$$= \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f(|x|) = \begin{cases} \text{se } 0 \leq x \leq 3 : = f(x) \\ \text{se } -3 \leq x < 0 : = f(-x) \end{cases}$$

$0 \leq |x| \leq 3$

dominio $[-3, 3]$

grafico



Composizione con una traslazione

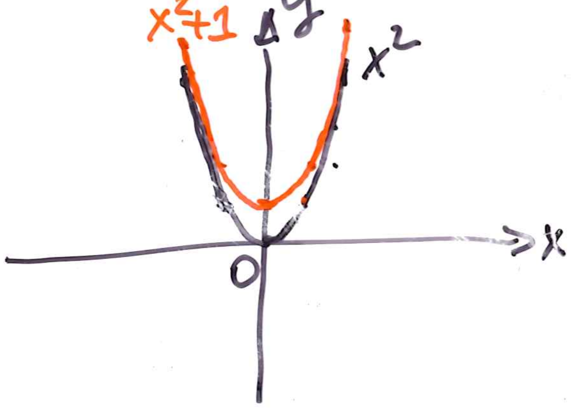
$T(x) = x + k \qquad k \in \mathbb{R}$

La composizione $T \circ f(x) = f(x) + k$ trasla il grafico di $f(x)$ nella direzione dell'asse y di $|k|$ nel verso positivo se $k > 0$
negativo se $k < 0$

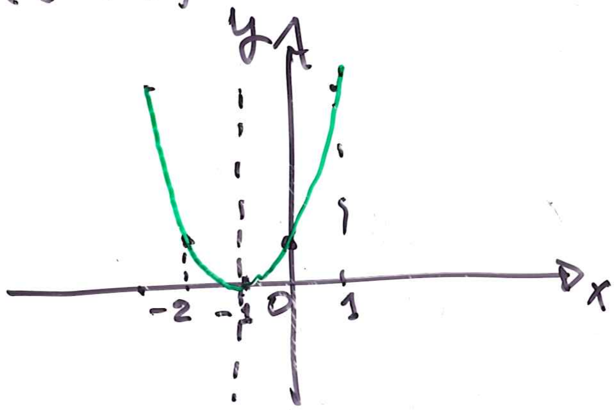
La composizione $f \circ T(x) = f(x+k)$ trasla il grafico $f(x)$ nella direzione dell'asse x di $|k|$ nel verso positivo se $k < 0$
negativo se $k > 0$

$f(x) = x^2 \quad , \quad k = 1$

$T \circ f(x) = x^2 + 1$

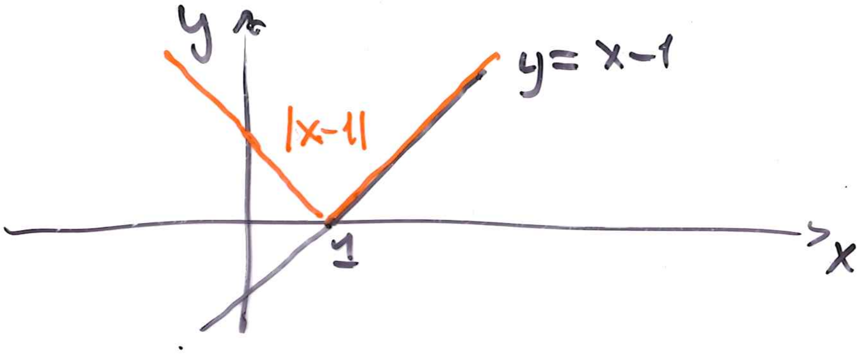


$f(T(x)) = (x+1)^2$



$f(x) = |x-1|$ tracciare il grafico pensandolo come gr. di funzione composta

$$x \xmapsto{(\;)-1} x-1 \xmapsto[|\;|]{f(\;)} f(x-1) = |x-1|$$



...oppure: il grafico di $|x-1|$ è il traslato di quello di $|x|$ nella direz. e verso dell'asse x di 1 unità!

$f(x) = 2 - x^3$ Scomporre in funz. elementari

$$x \xmapsto{(\ )^3} x^3 \xmapsto{-(\ )} -x^3 \xmapsto{(\ )+2} 2-x^3$$

$y = \quad F(x) = x^3$

$z = \quad G(y) = -y$

$w = \quad H(z) = z+2$

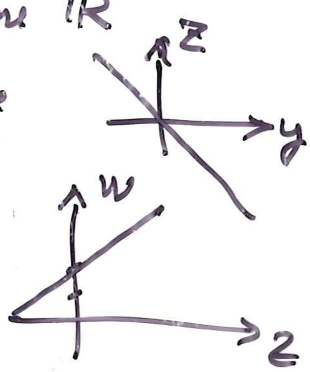
$f(x) = H \circ G \circ F(x) =$
$= H(G(F(x)))$

è monotona?

F : monotona crescente su $\mathbb{R}$

G : " decrescente

H : " cresc.



sì monotona decrescente

Scomporre $(x+1)^2$ $\qquad x \xmapsto{(\ )+1} x+1 \xmapsto{(\ )^2} (x+1)^2$

$$f(x) = \frac{x-2}{2-x^3} \qquad g(x) = (x+1)^2$$

Comporre $f \circ g$ e $g \circ f$ precisando in entrambi i casi l'I.D. della funzione composta.

$$f \circ g(x) = f\left((x+1)^2\right) = \frac{(x+1)^2 - 2}{2 - \left((x+1)^2\right)^3} = \ldots$$

I.D. $(x+1)^6 \neq 2 \iff x+1 \neq \sqrt[6]{2}$ e $x+1 \neq -\sqrt[6]{2}$

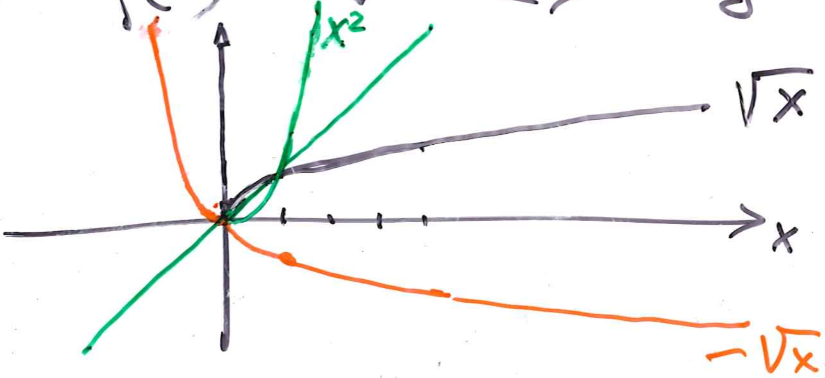
$\iff \boxed{x \neq -1 \pm \sqrt[6]{2}}$

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{x-2}{2-x^3}\right) =$$

$\boxed{\text{I.D. } x \neq \sqrt[3]{2}}$

$$= \left(\frac{x-2}{2-x^3} + 1\right)^2 = \left(\frac{x-x^3}{2-x^3}\right)^2$$

$$f(x) = \sqrt{x} \iff y = \sqrt{x} \iff \begin{cases} y^2 = x \\ y \geq 0 \end{cases}$$



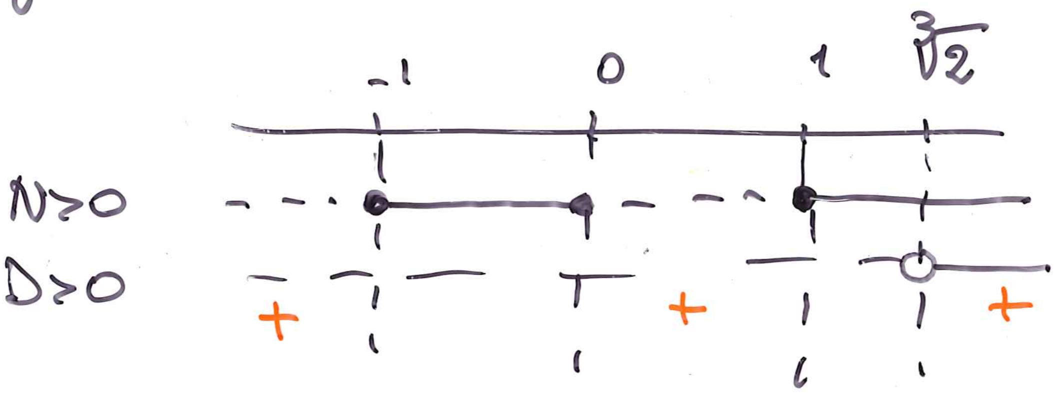
Le due diverse inverse di x^2 (in dipendenza dal dominio di invertibilità di x^2: $[0,+\infty)$ o $(-\infty,0)$.

$f(x): \ x \neq \sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $g(x): \ x \geq -1$

$$f(x) = \frac{x-2}{2-x^3} \qquad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{x-2}{2-x^3}\right) = \sqrt{\frac{x-2}{2-x^3}+1}$$

$$\begin{cases} 2-x^3 \neq 0 \\ \dfrac{x-2}{2-x^3}+1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq \sqrt[3]{2} \\ \dfrac{x-x^3}{2-x^3} \geq 0 \iff \dfrac{x^3-x}{x^3-2} \geq 0 \end{cases}$$



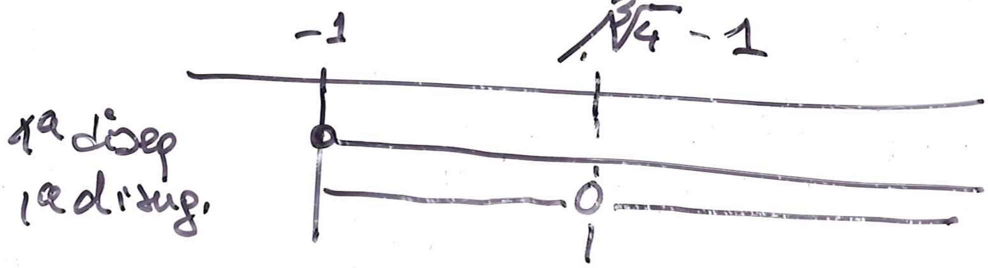
I.D. : $(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$

$$f \circ g(x) = f\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{2-\left(\sqrt{x+1}\right)^3}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ \left(\sqrt{x+1}\right)^3 \neq 2 \iff \sqrt{x+1} \neq \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$$\iff x+1 \neq \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$x = \sqrt[3]{4}-1 > 0$

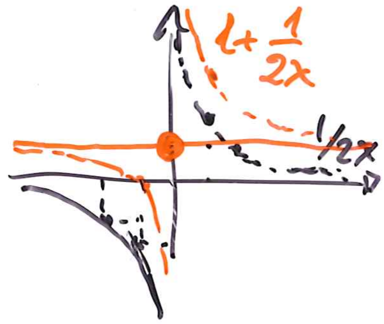


I.D.

$[-1, \sqrt[3]{4}-1) \cup (\sqrt[3]{4}-1, +\infty)$

$f(x) = 1 + \frac{1}{2x}$ è invertibile?

Qual è la sua inversa?

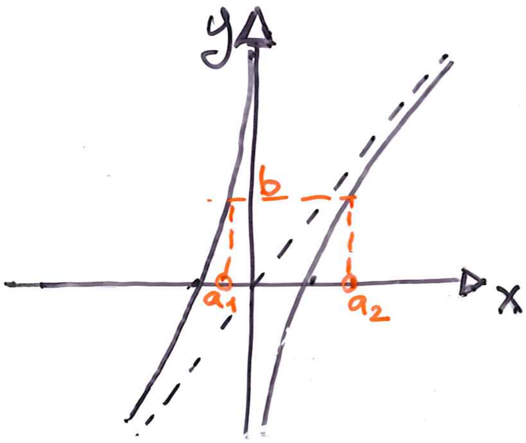


I.D. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Ragiono su $f(x)$

$$x \underset{\text{cresce}}{\xrightarrow{\cdot 2}} 2x \underset{\substack{\text{decr.} \\ \text{in } (-\infty,0) \\ \text{e in } (0,+\infty)}}{\xrightarrow{\frac{1}{(\,)}}} \frac{1}{2x} \underset{\text{cresc.}}{\xrightarrow{(\,)+1}} f(x)$$

data la monotonia la funzione è di certo invertibile su ciascuno dei 2 intervalli.
e sulla loro unione?



ATTENZIONE al CONTRO-ESEMPIO:
la funz. rappresentata da questo grafico è monotona crescente (e quindi invertibile) in $(-\infty, 0)$; lo è anche in $(0, +\infty)$. Ma non è invertibile su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ poiché non biunivoca!

Proviamo a calcolarla:

$$y = 1 + \frac{1}{2x}$$

risolvo rispetto a x

$$y - 1 = \frac{1}{2x} \quad \Updownarrow$$

$$\frac{1}{y-1} = 2x$$

$$x = \frac{1}{2(y-1)}$$

L'inversa esiste; è def. in $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$