$f : A \to B$ e sia $A \cap B \neq \emptyset$

$f_{|A \cap B} : A \cap B \to B$

Posso comporre $f \circ f(x) = f(f(x))$

Es: $f(x) = x^3$

$$(f \circ f)(x) = f(x^3) = (x^3)^3 = x^9$$

$f \circ f$: iterata seconda di f
$\quad\quad\quad$ ||
$\quad\quad$ ripetuta

||

f^2

$$\boxed{f^2(x) = f(f(x)) \quad \text{oppure } \frac{(f(x))^2}{\text{NO}}}$$

Su Richiesta di Spiegazione di SIMBOLI
e TERMINOLOGIA

Percorso fin qui fatto:

Numeri razionali – reali

Def. funzione (DOMINIO, IMMAGINE, LEGGE UNIVOCA, GRAFICO)

Def. potenza a esponente intero

↓

funzioni potenza a esponente intero

LORO STUDIO COME PRETESTO PER INTRODURRE:

PARITÀ

T. ESIST. RADICI n-esime

MONOTONIA

BIUNIVOCITÀ – in particolare SURIETTIVITÀ

Def. Composizione di funzione

ES. di COMPOSIZIONE con TRASLAZIONI
DILATAZIONI positive
OPPOSTO

Def Funzione invertibile

Equivalenza INVERTIBILITÀ – BIUNIVOCITÀ
GRAFICO dell'inversa

PROGRAMMA

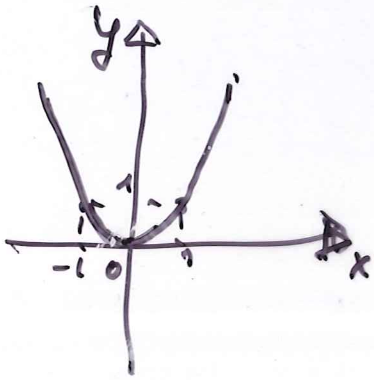
- Invertire (dove si può) le funzioni potenza x^k con $k \in \mathbb{Z}$
- Definire potenze a esponente razionale e reale (PROPRIETÀ ?)
- Grafici di x^α $(x>0,\ \alpha \in \mathbb{R})$
- Definire funzioni esponenziali – PROPR. e GRAFICI.
- Invertire (se possibile) le funzioni esponenziali: logaritmi – PROPR. e GRAFICI

Inversione delle funzioni con esponente intero positivo

x^{2k} $\qquad$ x^{2k+1} $\qquad$ $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

Lo vedo su due esempi corrispondenti a $k=1$

$f(x)=x^2$



monotona str. crescente su $[0,+\infty)$ e str. decr. su $(-\infty,0)$

(non è invertibile $\forall x \in \mathbb{R}$ poiché non è biunivoca)

Posso operare delle restrizioni sul dominio

$f|_{[0,+\infty)} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

monot. cresc. $\Rightarrow$ INIETT.

è suriettiva (VEDI IERI)

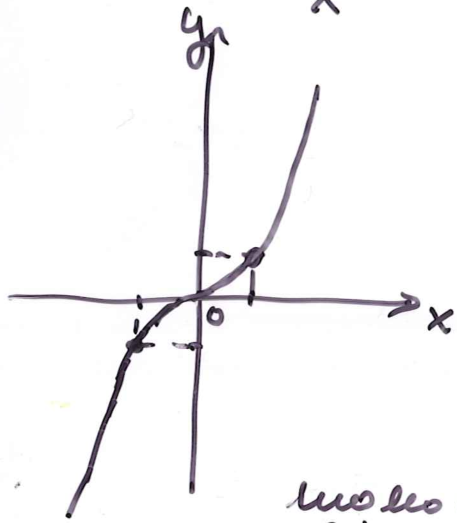
$\Rightarrow$ invertibile

l'inversa QUI è $\sqrt{\ } : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

Invece se restringo su $(-\infty,0)$

$f|_{(-\infty,0)} : (-\infty,0) \to (0,+\infty)$ è iniettiva (monot. DECRESC.) suriett. (VEDI IERI)

x^3



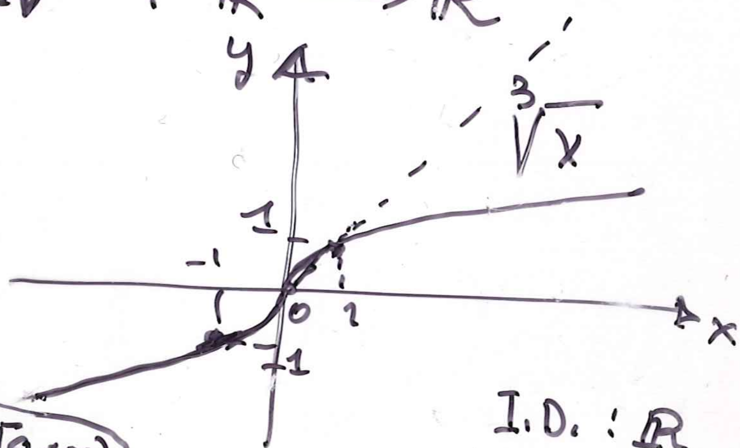
monotona strett. cresc. su tutto l'intervallo $(-\infty,\infty)$ (asse x)

$\Rightarrow$ iniettiva

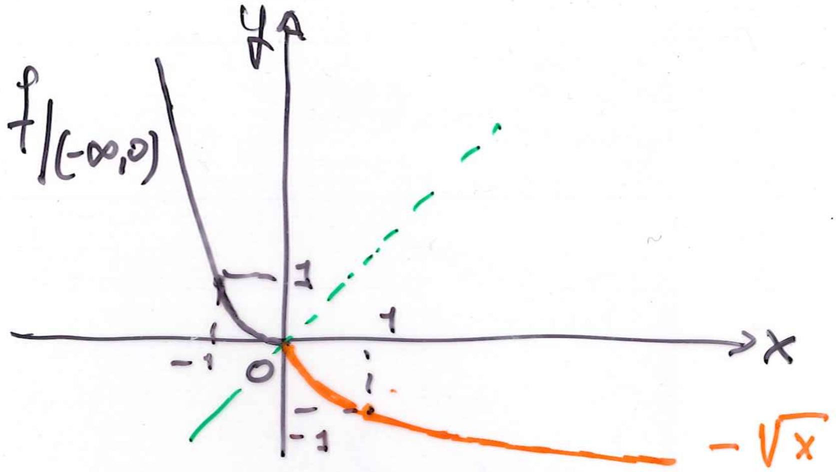
È anche suriettiva (VEDI IERI) su $\mathbb{R}$

Quindi è definita la funzione inversa

$\sqrt[3]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



I.D. : $\mathbb{R}$



Esiste l'inversa ed è $-\sqrt{x}$:

$-\sqrt{\ } : (0,+\infty) \to (-\infty,0)$

Monotonia di queste funzioni f^{-1}?

Hanno la stessa monotonia delle funzioni f di partenza.

Teorema. Sia $f : (a,b) \to B = f((a,b))$

Se f è monotona crescente (decresc.)

$$f^{-1} : B \to (a,b)$$

è a sua volta mon. cresc. (decresc.)

Tesi $\forall\, y_1, y_2 \in B$ se $y_1 < y_2$ anche

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Dimostrazione. Sia vero che per una certa coppia $y_1, y_2 \in B$ si abbia

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$$

Applico f a entrambi questi valori

Dato che f è monotona cresc.:

$x_2 \leq x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$; poiché $x_i = f^{-1}(y_i)$:

non $y_1 < y_2$ come ipotizzato! $\longleftarrow$ $y_2 = f(f^{-1}(y_2)) \leq f(f^{-1}(y_1)) = y_1$ c.v.d.

$\sqrt[n]{x}$ è stata definita $\forall n \in \mathbb{N}$

I.D. $\begin{cases} \text{se } n \text{ è pari} & [0,+\infty) \\ \text{se } n \text{ è dispari} & (-\infty,+\infty) \end{cases}$

le proprietà algebriche delle $\sqrt[n]{x}$ sono analoghe a quelle delle potenze pur di interpretare

$$\sqrt[n]{x} \quad \text{come} \quad x^{1/n}$$

ATTENZIONE. Poiché $\frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ e voglio che valgano le proprietà delle potenze (in particolare $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$) dovrà essere

$$x^{1/n} = x^{2/2n} = x^{2\cdot\frac{1}{2n}} = \left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^2 = \left(\sqrt[2n]{x}\right)^2$$

quindi il dominio massimale della funzione $x^{1/n}$ è $[0,+\infty)$ anche se la corrispondente radice $\sqrt[n]{x}$ ha indice dispari e quindi è def su tutto $\mathbb{R}$!

Siano $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$

alcune proprietà dei radicali riletti in termini di potenze

$$\sqrt[n]{x_1 x_2} = \sqrt[n]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2} \iff (x_1 x_2)^{1/n} = x_1^{1/n}\cdot x_2^{1/n}$$

Sia $x \in [0,+\infty)$

$$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[m]{x} = ? \iff x^{1/n}\cdot x^{1/m} = x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} =$$

$$= x^{\frac{m+n}{nm}}$$

$$= \sqrt[nm]{x^{m+n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x} \iff \left(x^{1/n}\right)^{1/m} = x^{\frac{1}{n\cdot m}}$$

Definisco le potenze con esponente razionale, $\forall x \in [0,+\infty)$ se

$\frac{m}{n} > 0$:
$$x^{\frac{m}{n}} =: (x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$$
$$=: (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m$$

$\forall x \in (0,+\infty)$ se

$\frac{m}{n} < 0$:
$$x^{\frac{m}{n}} =: (x^{-1})^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{m}{n}}$$
$$=: (x^{-\frac{m}{n}})^{-1} = \frac{1}{x^{-\frac{m}{n}}}$$

$\Longrightarrow$ quindi se voglio pensare all'insieme di tutte le potenze con esponente razionale devo restringere l'I.D. a $(0,+\infty)$

Perché?

Esempio: $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = -\left(\frac{-2}{6}\right)$. Allora:

$$x^{1/3} = x^{-\left(\frac{-2}{6}\right)} = \frac{1}{x^{\frac{-2}{6}}} = \frac{1}{(x^{1/6})^{-2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{(x^{1/6})^2}} = \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt[6]{x})^2}}$$

$\sqrt[6]{x}$ è def. per $x \geq 0$

$\sqrt[6]{x}$ è al denom. $\Longrightarrow x \neq 0$

$\Longrightarrow x > 0$

Ogni numero reale per la proprietà di densità può essere approssimato bene quanto voglio con numeri razionali, cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$ esiste $p \in \mathbb{Z}$

$$\frac{p}{10^k} \leq \alpha < \frac{p+1}{10^k} \qquad (*)$$

approssimaz. decimale per difetto — appross. decimale per eccesso

x^α ? è l'elemento separatore (esistente per la completezza di $\mathbb{R}$) dei due insiemi

$$A = \left\{ x^{\frac{p}{10^k}} \quad p \text{ opportuno, scelto come in } (*), \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \left\{ x^{\frac{p+1}{10^k}} \quad p \text{ opportuno scelto come } (*), \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

Sono separati? Sì

Può succedere:

$$A \ni x^{\frac{p}{10^k}} \stackrel{?}{=} x^{\frac{q}{10^h}} \in B \quad : \text{NO}$$

$\Longleftrightarrow \dfrac{p}{10^k} = \dfrac{q}{10^h}$: ma questo è impossibile poiché in $(*)$: $\dfrac{p}{10^k} \leq \alpha < \dfrac{q}{10^h}$

$2^{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2} \simeq 1.4142\ldots$

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$
$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$
$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$
$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$$
$$\vdots$$

$2^{\sqrt{2}} \simeq 2^{1.4}$ anzi $\sqrt[5]{2^7} = 2^{1.4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1.5} = \sqrt{8}$

$$\sqrt[5]{2^7} = 2\sqrt[5]{4}$$

o più precisamente:

$$2^{1.41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1.42}$$

ecc... ma fare i conti è terribile!

$$2^{1.41} = 2^{\frac{141}{100}} = 2^{1+\frac{41}{100}} = 2 \cdot 2^{\frac{41}{100}}$$

Potenze con <u>esponente razionale</u>:

$$\sqrt[n]{a} =: a^{1/n} \qquad (a \geq 0 \quad n \geq 1,\ n \in \mathbb{N})$$

Di qui

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \geq 0 \quad \frac{m}{n} > 0)$$
$$= (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Se voglio $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, qualsiasi devo chiedere

$$a > 0.$$

Potenze con <u>esponente reale</u> (base $a > 0$)

Definite "per approssimazione" ....

Es. $2^{\sqrt{2}}$?

PROPRIETÀ

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$; $\forall c, d \in \mathbb{R}$:

- $a^0 = 1 \quad \forall a$; $1^c = 1 \quad \forall c$
- $a^c \cdot a^d = a^{c+d}$
- $a^c \cdot b^c = (ab)^c$
- $(a^c)^d = a^{cd}$
- $a^c > 0$
- se $c > 0$: $a > 1 \Rightarrow a^c > 1$
  $0 < a < 1 \Rightarrow a^c < 1$

  se $c < 0$: si scambia

- se $c>0$: $0<a\leq b \Rightarrow a^c \leq b^c$ *
  se $c<0$: $\geq$
- se $c<d$: $a>1 \Rightarrow a^c < a^d$ *
  $0<a<1 \Rightarrow a^c > a^d$

Esempi.

Risolvere le equazioni:

$x^2 = 10$; $x^4 = -1$; $x^3 = -7$

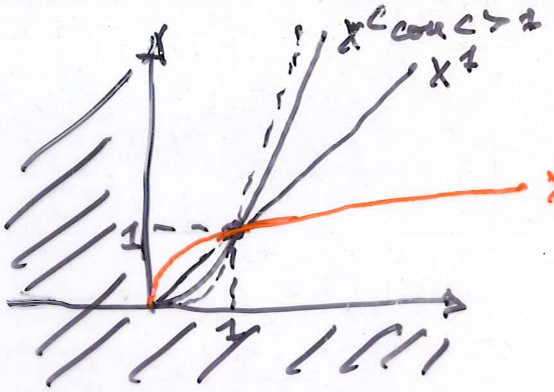
$x^{2/3} = 5$; $x^{\sqrt{2}} = 4$

Tutte queste sono equazioni del tipo

$$x^c = b$$

e abbiamo visto che: se $b>0$ sono risolubili in $\mathbb{R}$;

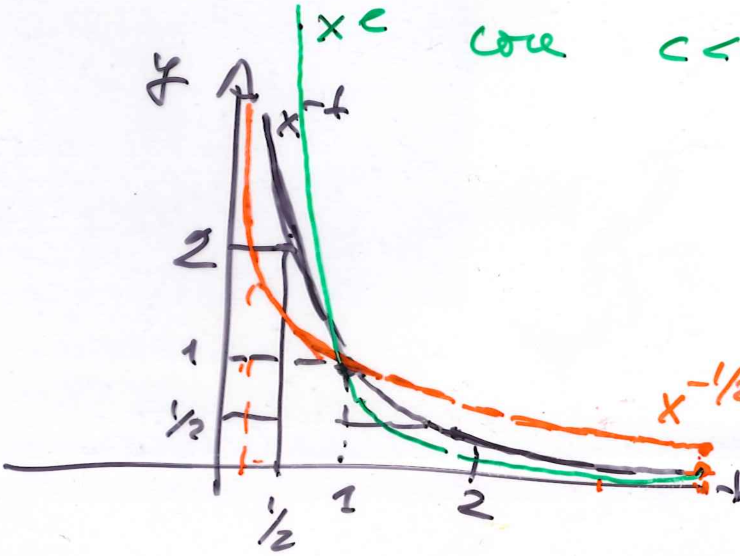
se $b<0$ ....



$c>0$

x^c con $0<c<1$

monotone crescenti!



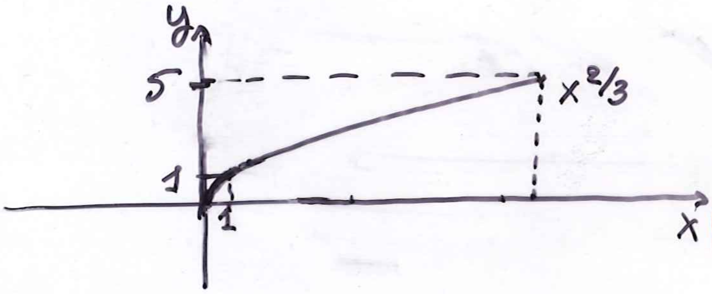
con $c<-1$

monotone decrescenti

$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e in generale $-1<c<0$

Esercizio. Risolvere $x^{2/3} = 5$

$0 < \frac{2}{3} < 1 \qquad f(x) = x^{2/3}$



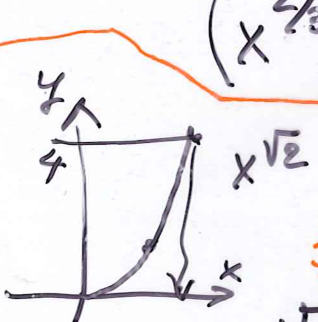
Traccio il grafico per ricordarmi che $x^{2/3}$ è monotona crescente e visto che è suriettiva su $(0,+\infty)$ esisterà 1 e un sol $\bar{x}$ t.c. $\bar{x}^{2/3} = 5$

Cioè l'equazione ha 1 e 1 sola soluzione

$$\left(x^{2/3}\right)^3 = 5^3 \iff x^{\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}} = 5^3$$

$$\iff x^2 = 5^3$$

$$x = +\sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$$



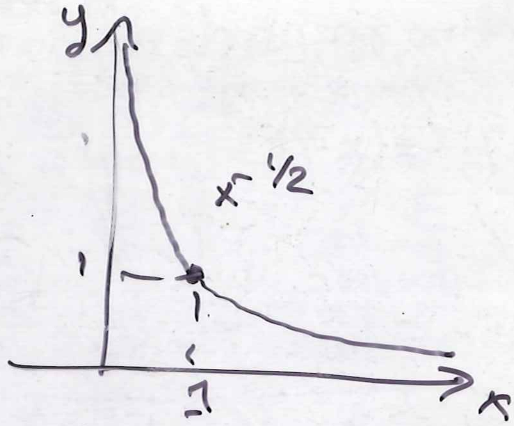
Analogam. risolvo:

$$x^{\sqrt{2}} = 4 \iff x^{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$x = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(4^{1/2}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$$

La soluzione corrisponde ad applicare ad entrambi i membri la funzione inversa

$$X^{-1/2} > 5$$



$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^{1/2}} > 5 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^{1/2} < \dfrac{1}{5} \\ \underline{\underline{x > 0}} \end{cases}$$

(I.D. di $x^{1/2}$)

cioè $x < \frac{1}{25}$

fondamentale ricordare questa condiz.!

Sol. $x \in \left(0, 1/25\right)$

Svolgere gli esercizi contenenti radici e potenze con esponenti reali dell'Arg. 2