considero le funzioni del tipo

$$f(x) = a^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

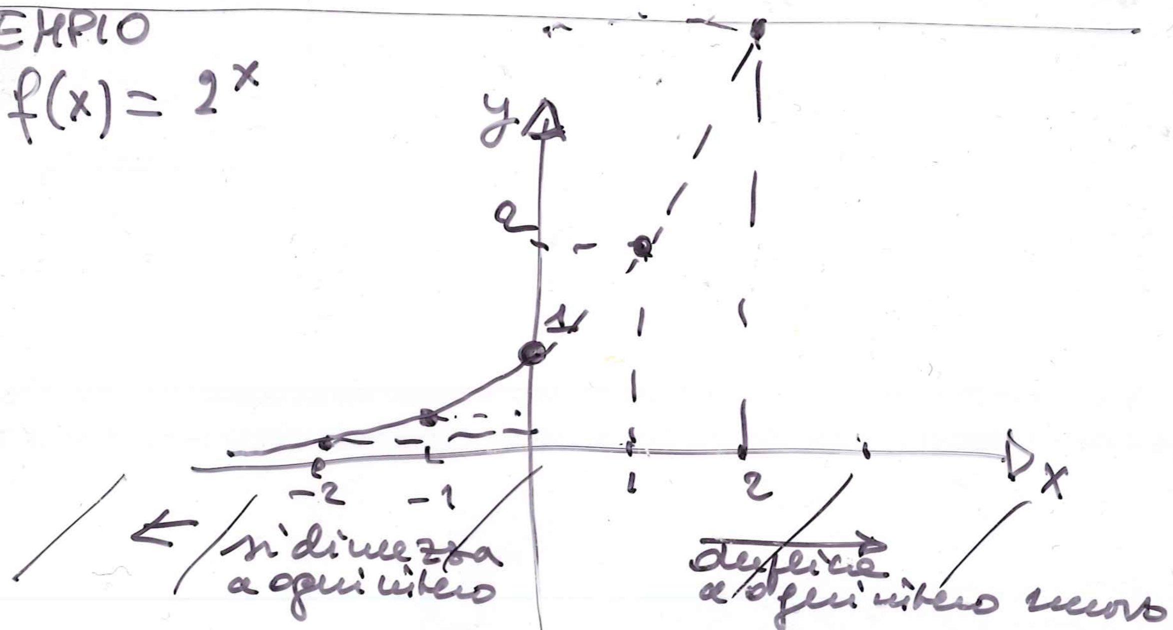
, cioè potenze con esponente variabile e base fissata

$a \in \mathbb{R}$ $\boxed{a>0}$ ← I.D.

Se $a=1$ $f(x) = 1^x = 1$
è un caso poco interessante

Cosa succede se
$\boxed{a>1}$ oppure $\boxed{0<a<1}$?

ESEMPIO
$f(x) = 2^x$



x	0	1	2	3	-1	-2
2^x	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$2^x > 0 \quad \forall x$ $\Rightarrow$ $f(x) = 2^x$ non si annulla mai

Monotonia? | Immagine? $(0,+\infty)$? VEDI PAG SUCCESSIVA

se $c<d$ e $a>1$ si ha $a^c < a^d$
$(a=2)$

$\Rightarrow a^x$ se $a>1$ è monotona crescente.

Dobbiamo poter dire che l'equazione

$$\circledast \qquad a^x = b > 0 \qquad (a \in (0,1) \cup (1,+\infty))$$

ammette sempre soluzione, per garantire che l'immagine di a^x sia tutto $(0,+\infty)$, senza "buchi".

Utilizzando la proprietà di completezza dei numeri reali si prova che $\boxed{\text{la}}$ soluzione esiste.

se esiste è unica,

$\rightarrow$ perché la funzione a^x è monotona (crescente se $a>1$, decrescente se $0<a<1$) e quindi è INIETTIVA

$\Longrightarrow$ il valore $y=b$ se viene assunto dalla funzione $f(x)=a^x$ viene assunto 1 volta sola.

La soluzione dell'eq. $\circledast$ si chiama <u>logaritmo</u> <u>in base</u> a <u>di</u> b e si indica come

$$\log_a b$$

<u>Per def.</u> $\log_a b$ è l'esponente che devo dare ad a per ottenere b:

$$a^{\log_a b} = b$$

Viceversa

$\log_a a^b = b$, sempre per definizione.

Definisco la funzione logaritmo in base a di x :

$$g(x) = \log_a x$$

come la funzione che ad ogni $x \in (0, +\infty)$ associa il suo logaritmo in base a

Riporto l'oss. precedente

$f(x) = a^x$: $g \circ f(x) = g(a^x) = \log_a (a^x) = x$

$g(x) = \log_a x$ $\quad f \circ g(x) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$

$\Rightarrow y = a^x$ è l'inversa di $x = \log_a y$ e viceversa

$\Rightarrow$ per risolvere le eq. esponenziali si usano i logaritmi; per risolvere le logaritmiche si usano le esponenziali

$$2^x = 5$$

$\Downarrow$ applico $\log_2(\ )$

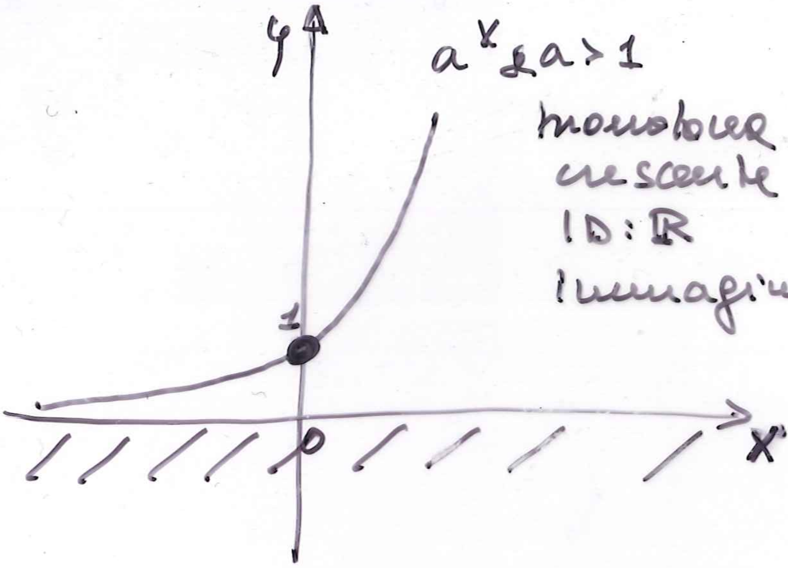
$$x = \log_2 (2^x) = \log_2 5$$

$$\log_2 x = 7$$

$\Downarrow$ applico $2^{(\ )}$

$$x = 2^{\log_2 x} = 2^7 = 128$$

Grafici delle funzioni esponenziali

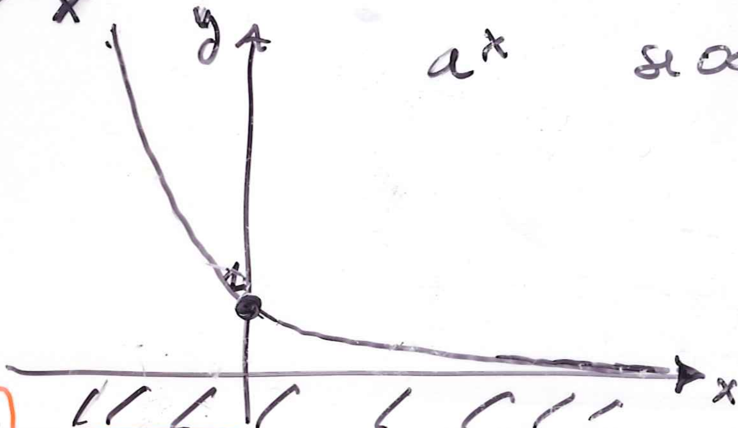


a^x se $a>1$

monotona crescente

ID: $\mathbb{R}$

immagine $(0,+\infty)$



a^x se $0<a<1$

se $0<a<1$ allora

$\frac{1}{a}>1$

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

che si scompone:

$$x \xrightarrow{-(\,)} -x \xrightarrow{\left(\frac{1}{a}\right)^{(\,)}} a^x \Rightarrow$$

il grafico è simmetrico risp. asse y di quello di $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ che ha un andamento come nella 1ª figura

(oppure: se $c<d$ e $0<a<1$ $a^c>a^d$; monotona decrescente)

Tracciare il grafico di $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Come usare le info contenute nei grafici per risolvere disequaz. esponenziali o logaritmiche

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 5$$

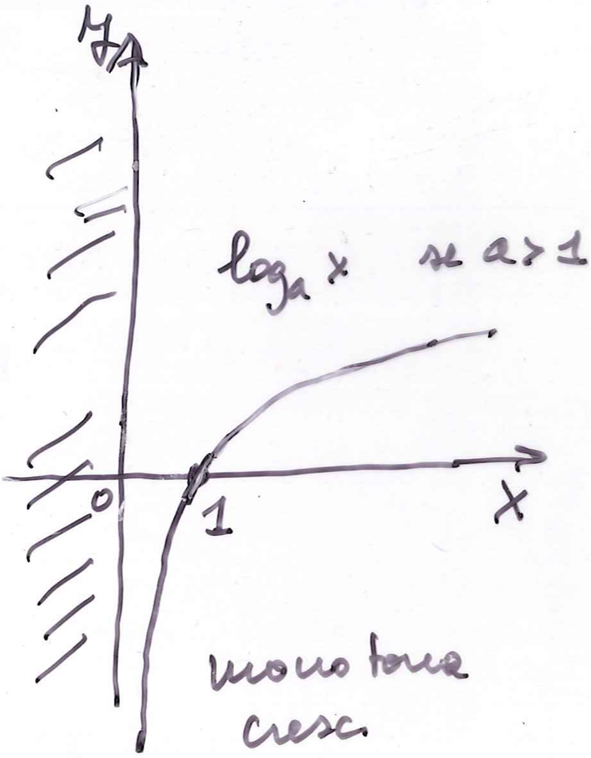
applico $\log_{\frac{1}{2}}(\,)$ monotona decresc. $\Downarrow$

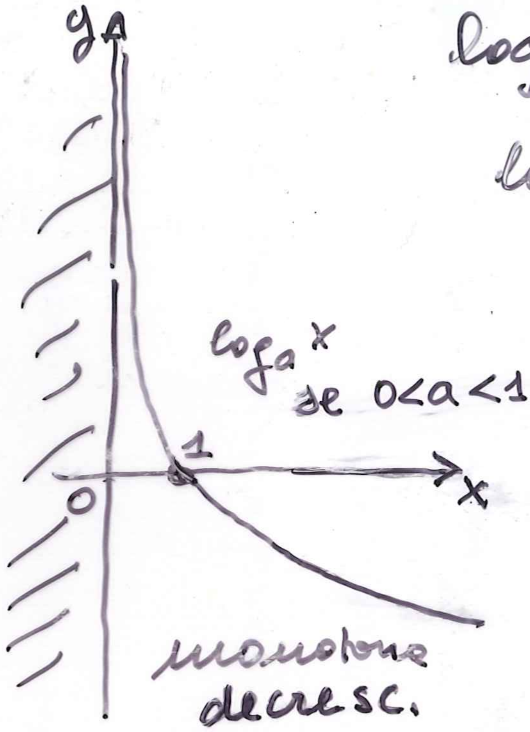
$$\log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{1/2}(5) \iff x < \log_{1/2} 5$$

$$\log_3(x) < -1$$

applico $3^{(\,)}$ monot. crescente $\Downarrow$

$$3^{\log_3(x)} < 3^{-1} \iff x < \frac{1}{3}$$





$\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$\log_a 1 = 0$

Ho simmetrizzato i grafici delle esponenziali rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante

INSERIRE LA prima proprietà alla pagina successiva. MI CHIEDO:

$$\log_2[x(x+1)] \overset{?}{=} \log_2 x + \log_2(x+1) \quad ?$$

NO

per essere = due funzioni devono avere uguale I.D.. E queste non hanno lo stesso I.D. Infatti

$$\text{I.D. } \log_2[x(x+1)] = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+1) > 0\} = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$$

$$\text{I.D. } [\log_2 x + \log_2(x+1)] = \{x \in \mathbb{R} \mid x>0 \text{ E } x+1>0\} = (0,+\infty)$$

posso invece scrivere:

$$\log_2[x(x+1)] = \begin{cases} \log_2 x + \log_2(x+1) & \text{se } x>0 \\ \log_2(-x) + \log_2(-x-1) & \text{se } x<-1 \end{cases}$$

Altro tipo di equazione : $a^x = b$

Se $a = 1$: • è identità $1^x = 1$
• è impossibile

Se $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $b \leq 0$ ... NON CI SONO SOLUZ

Se $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ e $b > 0$ l'equazione ammette una e una sola soluzione: essa si chiama LOGARITMO in BASE a di b :

$$\log_a b$$

$$\boxed{a^{\log_a b} = b \qquad \log_a a^c = c}$$

PROPRIETÀ

Sia: $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, $x, y \in \mathbb{R}$ $x > 0, y > 0$

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
- $\log_a (x^c) = c \log_a x$
- $(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x$
- $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$ purché sia $x \neq 1$

Perché $\forall x, y \in (0, +\infty)$ e $\forall a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y} \quad ?$$

devo dire che sono entrambe soluzioni della stessa equazione

$$a^t = b \qquad \text{(stesso termine noto } b\text{)}$$

$$a^{\log_a xy} = xy = b$$

sono uguali: OK

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = (x)(y) = xy = b$$

$\log_a 1 = 0$ poiché $1 = a^0$

$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$ perché

$$y \cdot \frac{1}{y} = 1$$

applico $\log_a$ $\Downarrow$

$$\log_a \left(y \cdot \frac{1}{y} \right) = \log_a 1$$

$$\log_a y + \log_a \left(\frac{1}{y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$$

$\Rightarrow$ simmetria rispetto all'asse x del grafico di $\log_{\frac{1}{a}} x$ rispetto a quello di $\log_a x$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

(mettendo insieme la prima e l'ultima)

$$\boxed{\log_a x^c = c \log_a x}$$

$a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$
$x \in (0,+\infty)$, $c \in \mathbb{R}$

Infatti

$$a^{\log_a x^c} = x^c$$

OK

$$a^{c \log_a x} = a^{(\log_a x)\cdot c} = \left(a^{\log_a x}\right)^c = (x)^c$$

Attenzione all'uso. È vero che

$$\log_2 x^2 = 2 \log_2 x \quad ? \quad \text{NO:}$$

$\log_2 x^2$ — ID: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad$ $2\log_2 x$ — ID: $(0,+\infty)$

potrei scrivere $\log_2 x^2 = 2 \log_2 |x|$

Proprietà del cambio di base

$$\boxed{(\log_a b)(\log_b x) = \log_a x}$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a x = - \log_{\frac{1}{a}} x$$

se $x \neq 1$ posso scrivere

$$(\log_a x)\cdot(\log_x a) = \log_a a = 1$$

$$\Longrightarrow \log_x a = \frac{1}{\log_a x}$$

x^x varia base ed esponente

$\Longrightarrow$ non è una funzione elementare $\left(x^c,\ a^x,\ c \in \mathbb{R},\ a \in (0,+\infty)\right)$

Per studiarla dovrò rappresentarla come:

$$x^x = a^t \qquad (\text{con } a>1 \text{ o } 0<a<1)$$

applico $\log_a$

$$\log_a x^x = \log_a a^t = t$$

$$\Rightarrow \quad t = \log_a x^x = x \log_a x$$

$$\Longrightarrow \quad x^x = a^{x \log_a x}$$

Si studia bene x^x quando conosco la funz. $\boxed{x \log_a x}$

$\Rightarrow$ I.D. $x^x = a^{x \log_a x}$ è $(0,+\infty)$

Esercizio trovare l'I.D. $(x^2-1)^{x-2}$

Soluzione. Ci si può arrivare subito: la base deve essere >0. Oppure

$$(x^2-1)^{x-2} = 2^{(x-2)\log_2(x^2-1)}$$

- $\log_2(x^2-1)$ è definito se e solo se $x^2-1>0$, cioè in $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$
- $x-2$ è definito $\forall x \in \mathbb{R}$

Quindi il loro prodotto è def. per $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.
Non ci sono condizioni da porre sull'esponente; quindi quello indicato è l'I.D. della funzione.