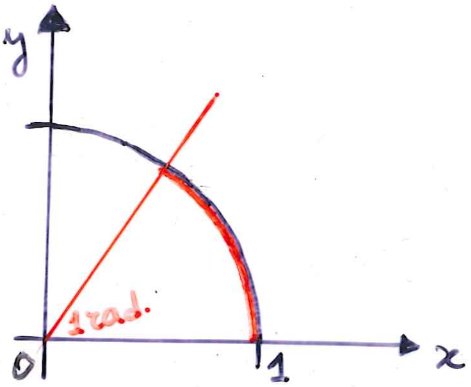
# Funzioni trigonometriche

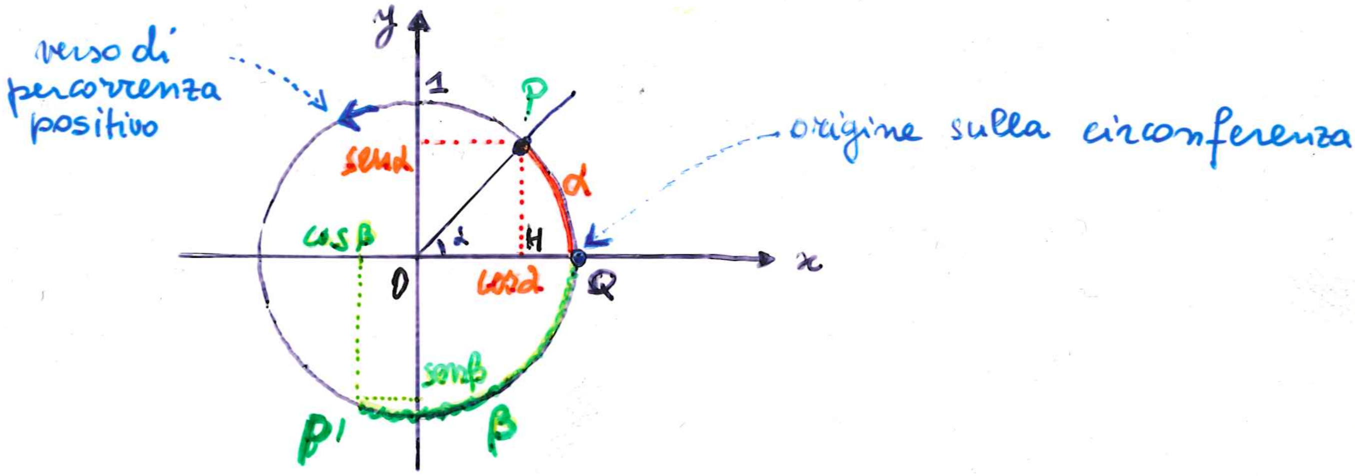
hanno per argomento un angolo misurato in radianti.




In generale per passare dalla misura in gradi $\alpha^\circ$ di un certo angolo alla sua misura in radianti usare la proporzione

$$\frac{\alpha^{rad}}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

angolo piatto = rad $\pi$.
retto = rad $\frac{\pi}{2}$.




sen $\alpha$ = ordinata del punto P della circonferenza di raggio 1 tale che l'arco QP misuri $|\alpha|$ e P segue Q (nel verso di percorrenza positivo) se $\alpha > 0$, la precede altrimenti

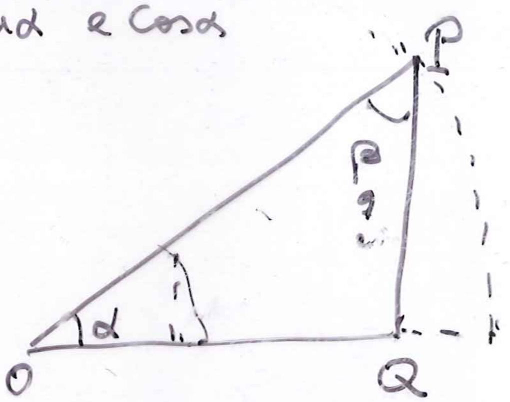
cos $\alpha$ = ascissa dello stesso P.

Evidentemente $|\text{sen}\,\alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$|\cos\alpha| \leq 1 \quad$ "

e (teor. di Pitagora) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Interpretazione geometrica di sen $\alpha$ e cos $\alpha$




$\overline{OP} = \rho$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$

$\Longrightarrow \quad \overline{PQ} = \overline{OP}\,\text{sen}\,\alpha$

$\uparrow$

cateto opposto ad $\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{OQ} = \overline{OP}\cos\alpha$

$\uparrow$

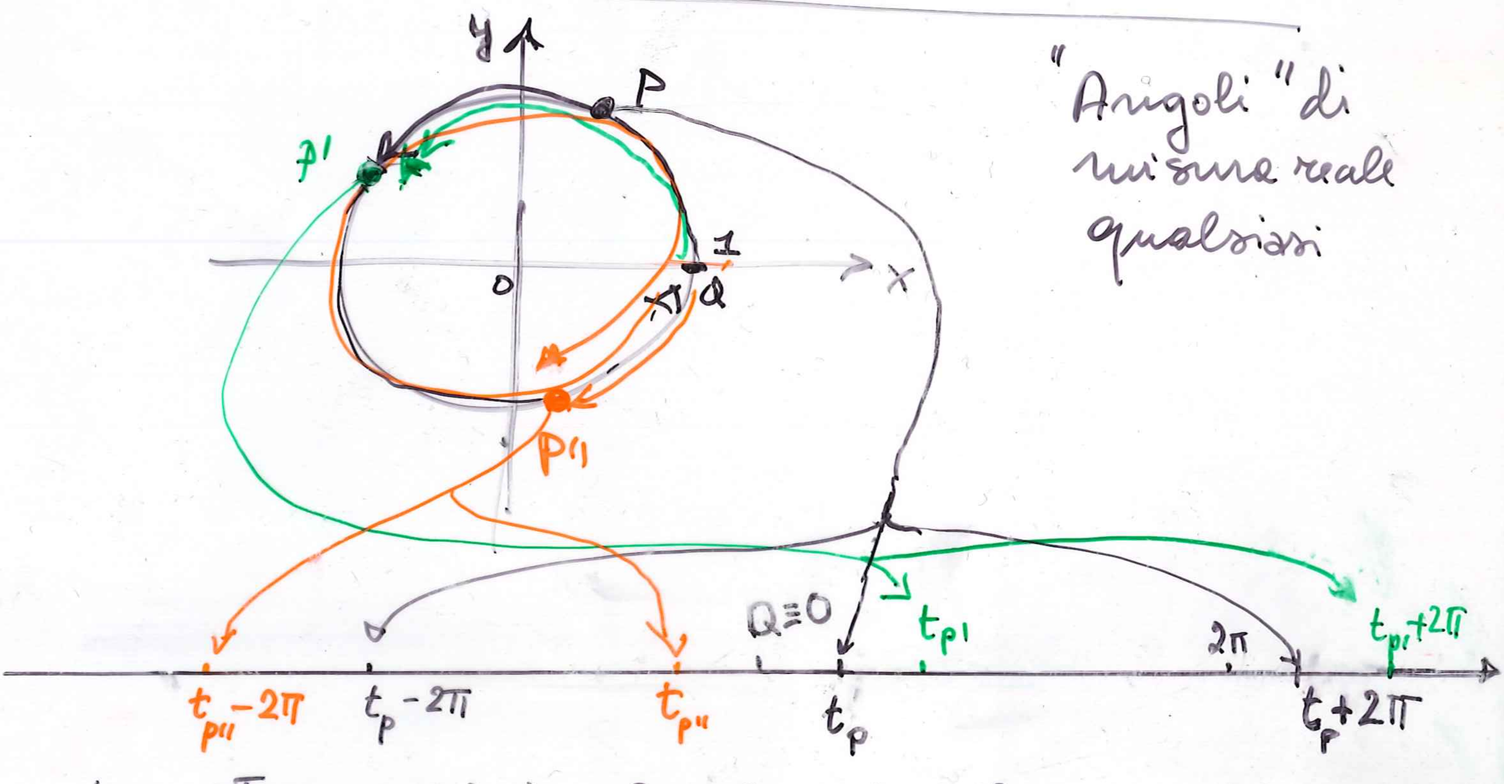
cateto adiacente ad $\alpha$.

$\Longrightarrow \quad \cos\alpha = \text{sen}\,\beta \qquad \left(\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$

---

"Angoli" di misura reale qualsiasi




una stessa posizione P sulla circonferenza può essere raggiunta dopo un diverso numero di giri in verso antiorario (+) o orario (−)

considero la funzione sen x
definita così:

$$\text{sen}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{sen}: x \longmapsto \text{sen}\, x$$

$$\text{sen}(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$

$\Rightarrow$ quindi l'immagine della funz.
sen x è un intervallo limitato.

---

In generale dico che una funzione

$$f: \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{A}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

è <u>limitata</u> su A se l'insieme $f(A)$ è limitato cioè $\forall\, y = f(x)$ $(x \in A)$
esistono $l, L \in \mathbb{R}$ tali che
risulti

$$l \leq y \leq L$$

... è sup. <u>limitata</u> se $\exists\, L \in \mathbb{R}$ t.c.
$\forall y = f(x)$ $(x \in A)$ risulti

$$y \leq L$$

... è <u>inf.</u> <u>limitata</u> se $\exists\, l \in \mathbb{R}$ t.c.
$\forall y = f(x)$ $(x \in A)$ risulti $l \leq y$.

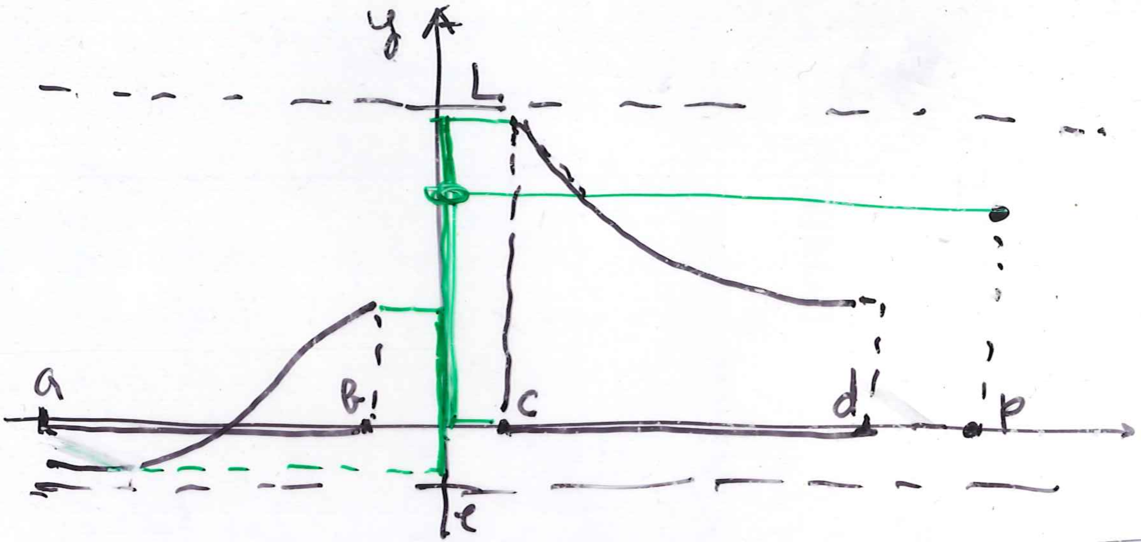
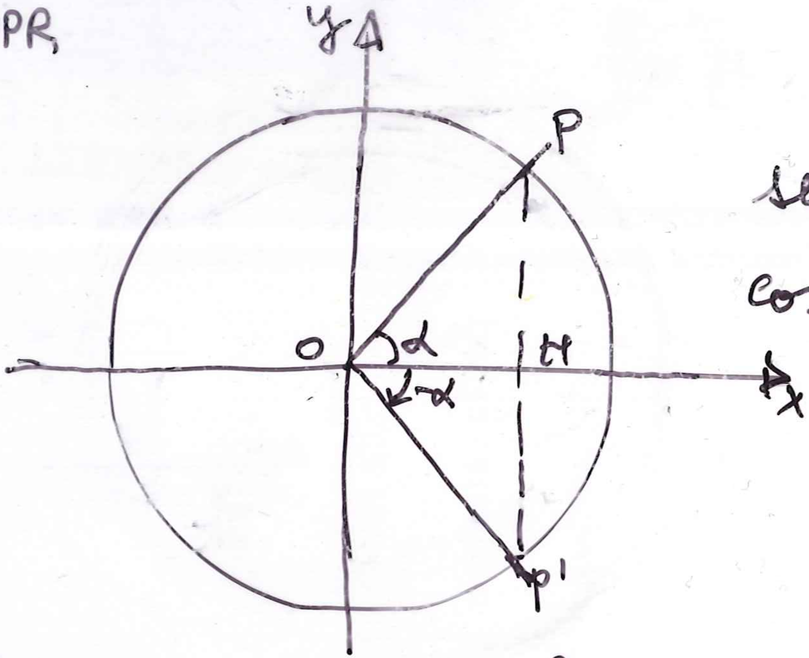



grafico di una funzione limitata su $[a,b] \cup [c,d] \cup \{p\}$

---

ALTRE PROPR. di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$




$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

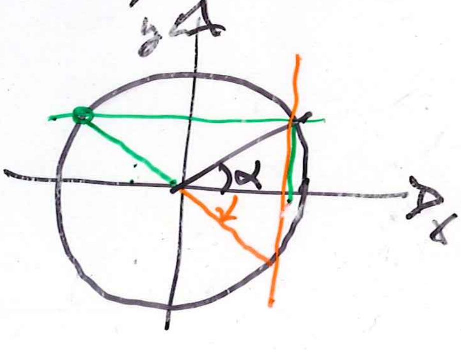
$\Longrightarrow$ $\operatorname{sen} x$ è una funzione dispari
$\cos x$ " " pari (1)

---

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e più in generale:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$




L'uguaglianza

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$

dice che dopo $\pi - 2\alpha$ il valore del seno si ripete... ma questo intervallo dipende da $\alpha$. Non vale $\forall \alpha \in \mathbb{R}$!

(2) Le funzioni sen x e cos x sono periodiche di periodo $2\pi$ intendendo con funzione periodica di periodo $p>0$ una

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(con I.D. che si ripete con periodo p)

tale che $\forall x \in$ I.D. risulti

$$f(x+p) = f(x)$$

e che non esista un $p'>0$ con $p'<p$ per cui vale la stessa proprietà.

Esempio

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

non è def. dove $\cos x = 0$

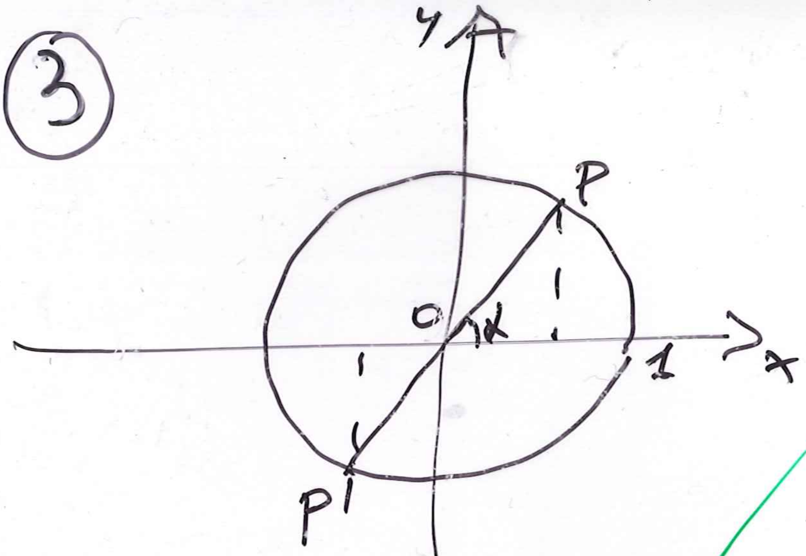
Visto che $\cos x$ è periodica ci saranno punti in cui $\cos x = 0$ che si ripresentano periodicamente.

$f(x)$ sarà periodica con periodo $\leq 2\pi$ periodo $=\pi$

perché: $\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)}}_{f(x+2\pi)} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = f(x)$

Ma $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$ $\Longrightarrow f(x+\pi) = f(x)$

(3)



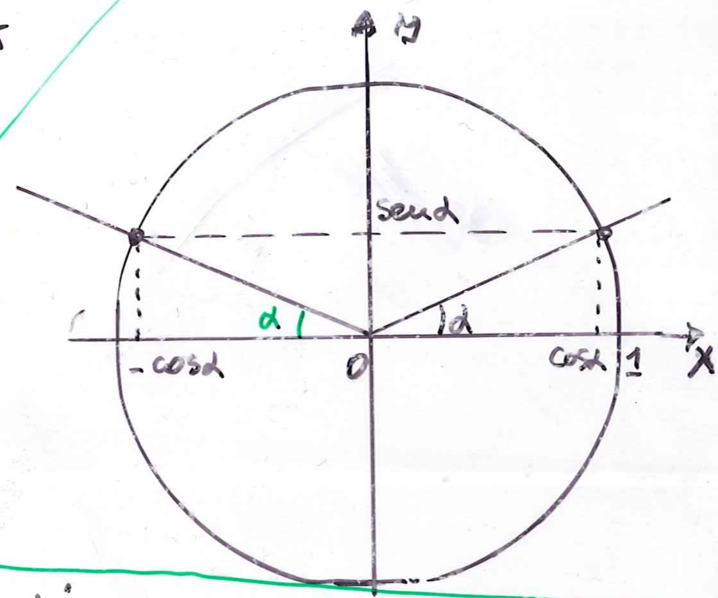

$\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

(4)

$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

- $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$




Queste proprietà permettono di operare come segue.

Rappresento sen x e cos x in $[0, \frac{\pi}{2}]$;

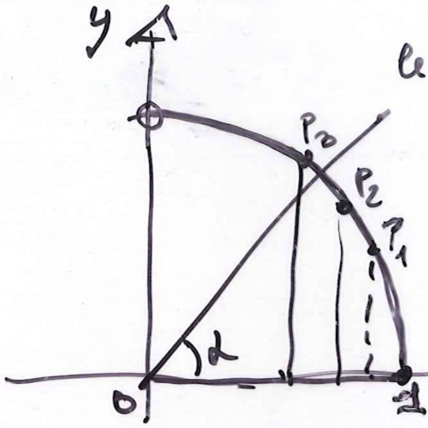
- in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ utilizzo il fatto che

$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

- in $(-\pi, 0)$ utilizzo le simmetrie legate alla parità delle due funzioni

$\Rightarrow$ disegno il grafico in $(-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ ripeto "infinite" volte il grafico per la periodicità (ho infatti tracciato il grafico su un intervallo di lunghezza pari al periodo $2\pi$ delle funz. sen x e cos x)




le ascisse da $P_1$ a $P_2$ ecc. "decrescono", le ordinate "crescono"

$\alpha = 0$ $\quad$ $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

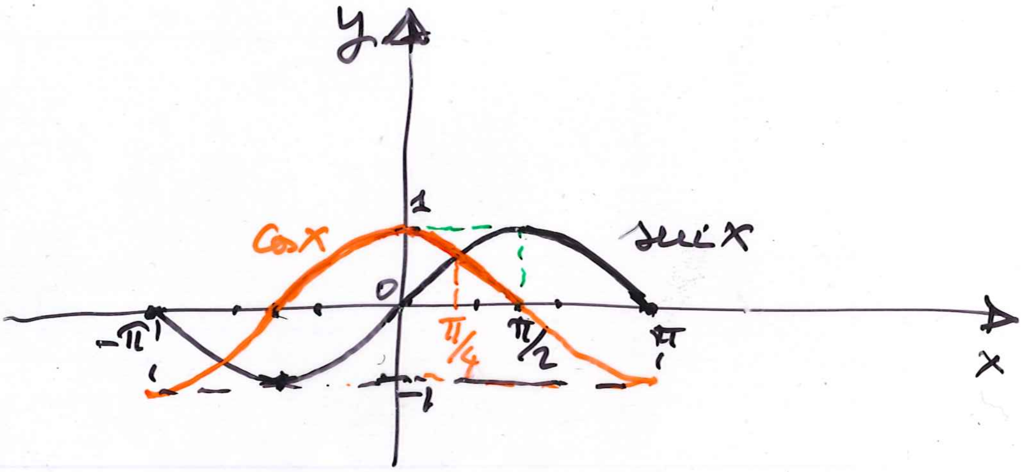
$\cos \frac{\pi}{2} = 0$

Un esame della figura dice che $\forall \alpha_1, \alpha_2$

con $\quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$

si ha $\quad \operatorname{sen} \alpha_1 < \operatorname{sen} \alpha_2$ : $\operatorname{sen} x$ cresc. in $[0, \pi/2]$

$\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$ : $\cos x$ decresc. in $[0, \pi/2]$



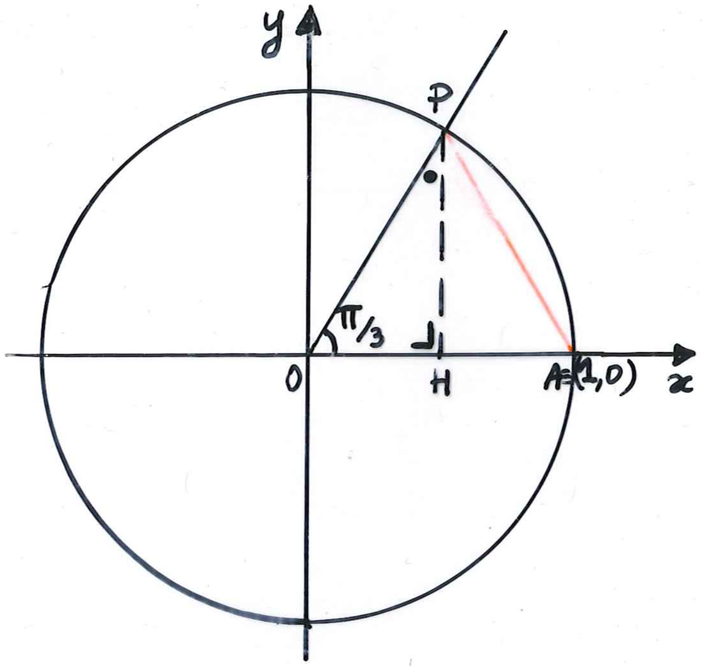

$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$
il grafico della la funz sen x è simmetrico rispetto a $x = \frac{\pi}{2}$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
il grafico è simm. rispetto al punto $(\pi/2, 0)$

Il lucido successivo spiega come calcolare

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$

e di altri angoli in modo da tracciare con discreta precisione il grafico delle 2 funzioni in $[0, \pi/2]$. Vedi anche lucido 47 ter.




lati uguali

$\overset{\triangle}{OPA}$ isoscele con vertice O

$\Rightarrow$ equilatero

$\Rightarrow$ se $\overline{OP}=1$ allora

$\overline{OH} = 1/2$

$\overline{PH} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} =$

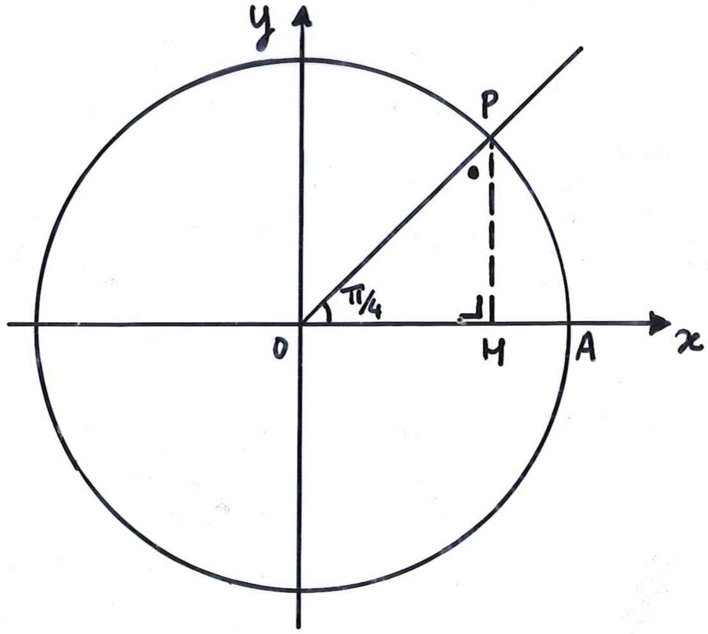
$= \sqrt{1-1/4} = \sqrt{3}/2$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = 1/2 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \sqrt{3}/2 = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \sqrt{3} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$$

---




angoli uguali

$\overset{\triangle}{OHP}$ isoscele con vertice H

$\Rightarrow OH = PH$ e

$\overline{OP}^2 = 2\,\overline{OH}^2$

$\Rightarrow \overline{OH} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

---

$\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ : FORMULE DI ADDIZIONE $\Rightarrow$

$$\cos\pi/12 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{sen}\pi/12 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

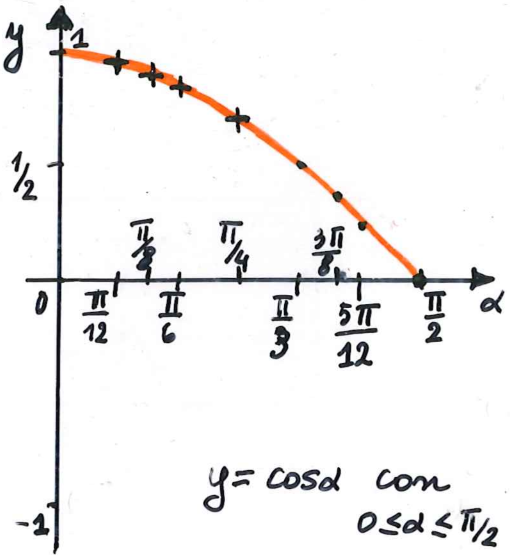
$$\operatorname{tg}\pi/12 = 2-\sqrt{3}$$

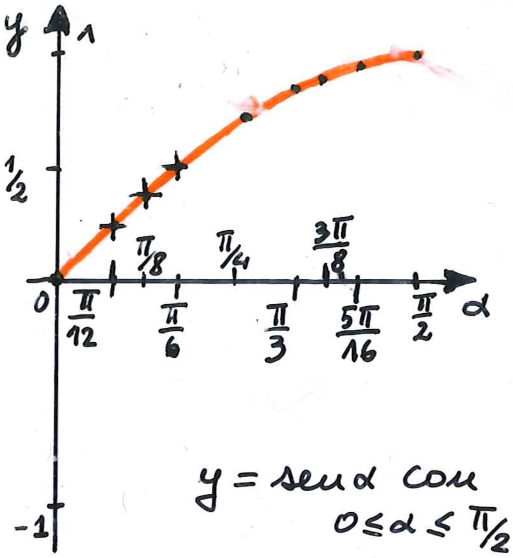
$\pi/8 = \frac{1}{2}\cdot\pi/4$ : FORMULE DI BISEZIONE $\Rightarrow$

$$\cos\pi/8 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

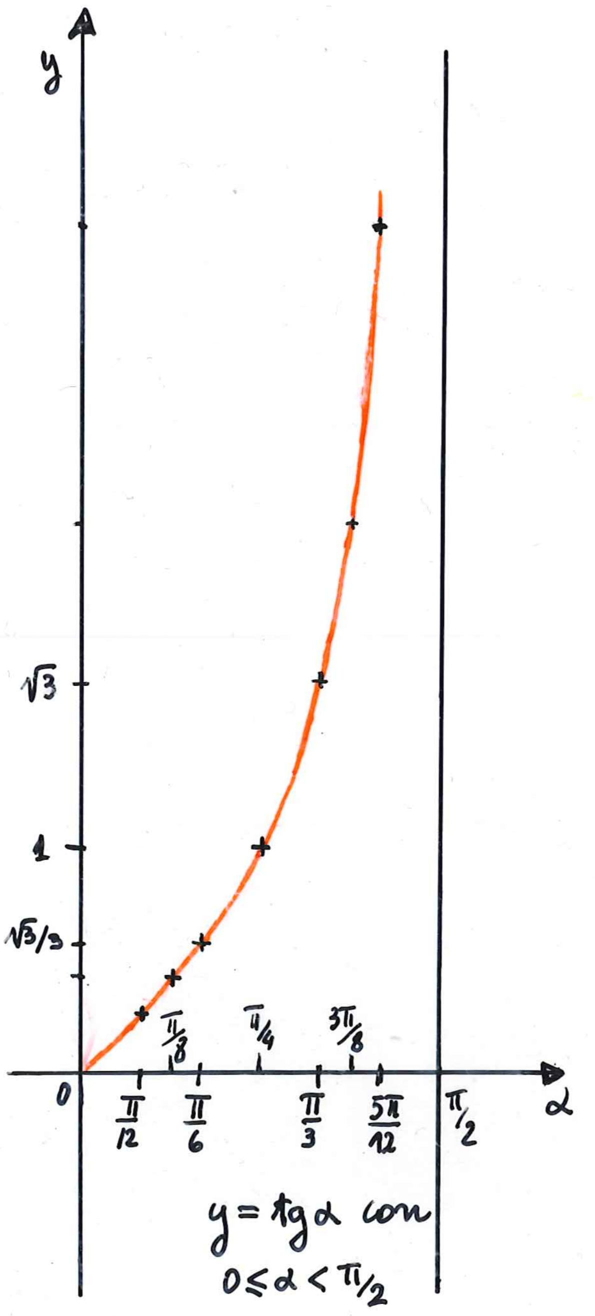
$$\operatorname{sen}\pi/8 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg}\pi/8 = \sqrt{2}-1$$

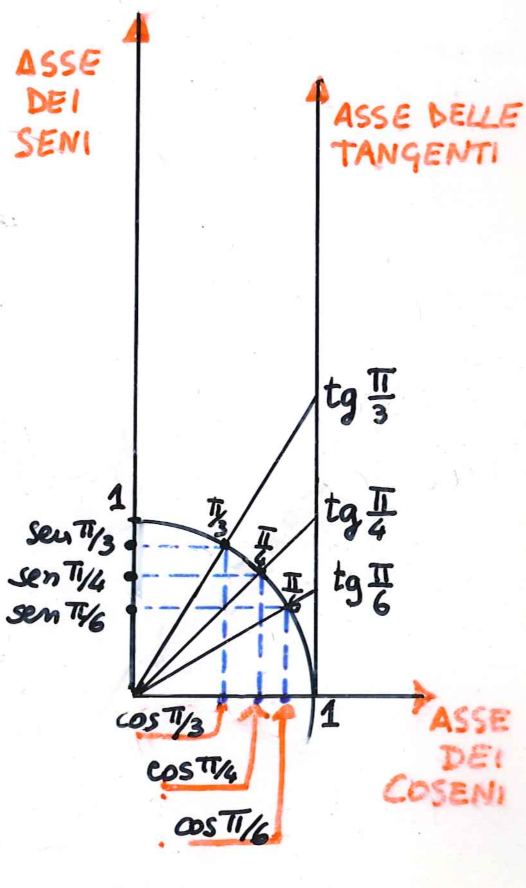



Note le relazioni tra seno e coseno di angoli complementari basta ricavare 4+3 valori per avere il grafico con il dettaglio proposto

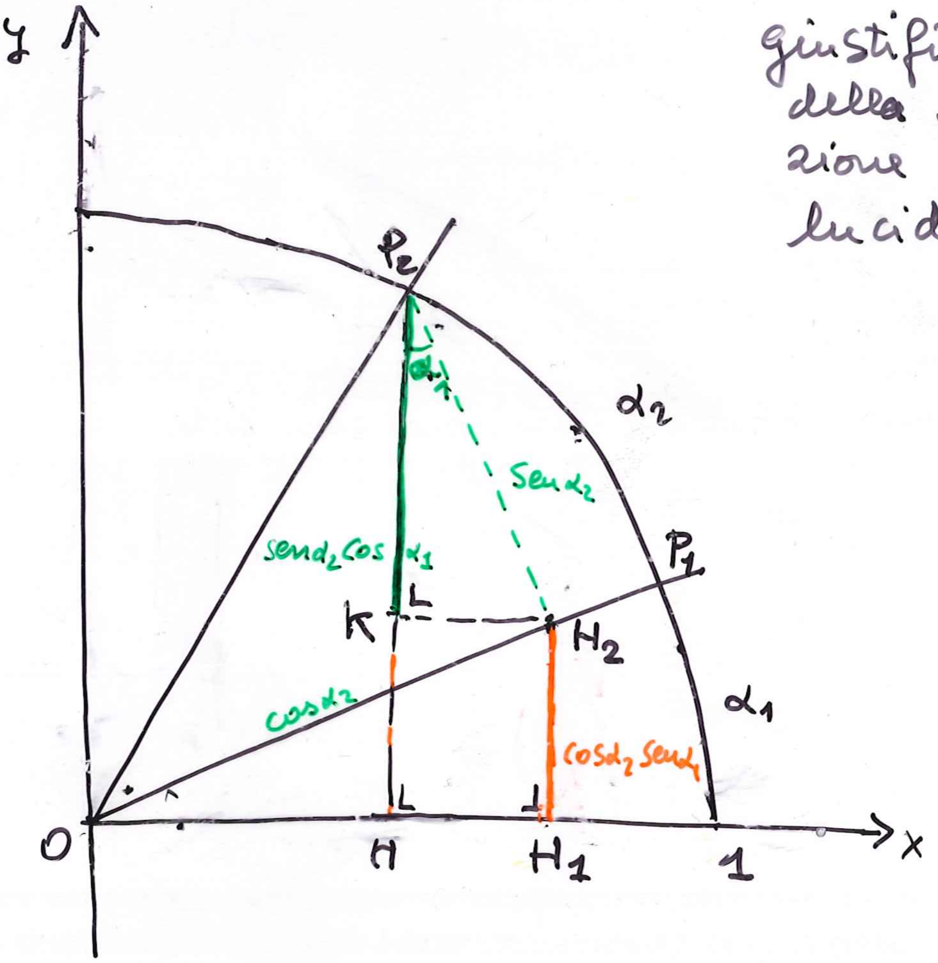



<u>Metodo grafico</u> (senza calcoli) per trovare $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ noto $\alpha$ (sempre $0 \le \alpha < \pi/2$)



| $\alpha^\circ$ | 0 | 180° | 90° | 45° | 30° | 60° | 15° | 36° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha^{rad}$ | 0 | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{5}$ |

giustificazione grafica della formula di addizione che si trova nel lucido F5.




$$\frac{\overline{P_2H}}{\overline{OP_2}} = sen(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\overline{OH_2} = \cos\alpha_2$$

$$\overline{H_1H_2} = \overline{OH_2}\, sen\,\alpha_1 =$$
$$= \cos\alpha_2\, sen\alpha_1$$

$\overline{P_2K}$ in $P_2KH_2$ è il cateto adiacente $\alpha_1$

$$\overline{P_2K} = \overline{P_2H_2}\cos\alpha_1 = sen\alpha_2\cos\alpha_1$$

$$\overline{P_2H} = \overline{P_2K} + \overline{H_2H_1} = sen\alpha_2\cos\alpha_1 +$$
$$+ \cos\alpha_2\, sen\alpha_1$$

$$\operatorname{sen}(\alpha_1-\alpha_2) = \operatorname{sen}(\alpha_1+(-\alpha_2)) =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha_1 \cos(-\alpha_2) + \operatorname{sen}(-\alpha_2)\cos\alpha_1 =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_1$$

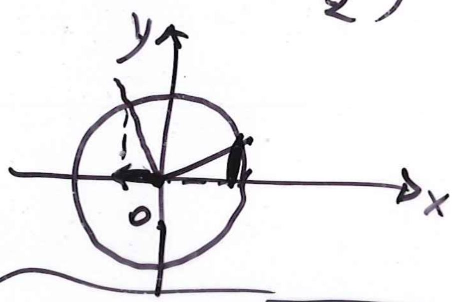
---

$$\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \cos\alpha \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{=1}$$

$$= \cos\alpha$$

mi dice che il grafico della funzione $\cos x$ è il traslato del grafico della funzione $\operatorname{sen} x$ nella direzione dell'asse $x$, verso opposto e modulo $\frac{\pi}{2}$. ALLORA:

$$\boxed{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha}$$




$$\cos(\alpha_1+\alpha_2) = \operatorname{sen}\left(\alpha_1+\left(\alpha_2+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\left(\alpha_2+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\left(\alpha_2+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2$$

$$\cos(\alpha_1-\alpha_2) = \cos(\alpha_1+(-\alpha_2)) =$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2$$

Quindi,

Come si vedrà a proposito della rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

$$\operatorname{sen}(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 \pm \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_1$$

$$\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \mp \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2$$

In particolare

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = \dots 2\cos^2\alpha - 1$$

Inoltre

$$\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(0 - x) = -\cos 0 \cdot \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

cioè sen è una funzione <u>dispari</u>

La funzione $tg\,x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$ è anch'essa una funzione periodica poiché quantomeno

$$tg(x + 2\pi) = tg\,x.$$

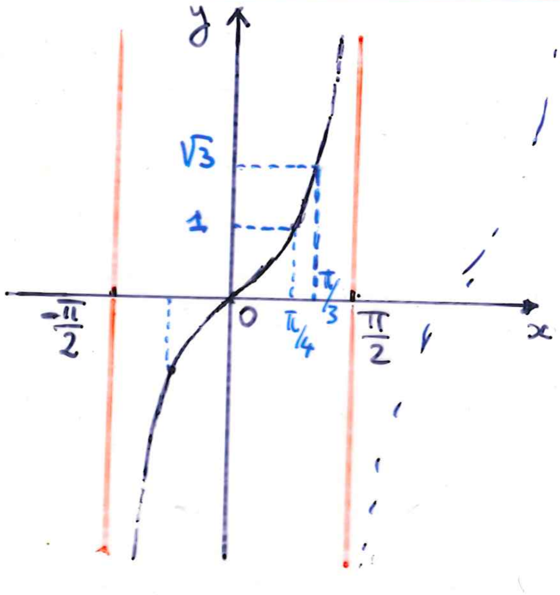
Ma si vede che essa è periodica di periodo $\pi$. Infatti

$$sen(x+\pi) = -\,sen\,x$$
$$cos(x+\pi) = -\,cos\,x$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{sen(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \frac{sen\,x}{cos\,x}$$

e d'altra parte non può essere periodica di periodo $\underset{0}{\overset{\vee}{\alpha}} < \pi$ poiché $tg(x+\alpha) = tg\,x$ deve valere $\forall x$ e in particolare per $x = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0$ $\Rightarrow sen\,\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi, \ldots$

**DEF.** $f : A \to B$ si dice periodica con periodo $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ se $\forall x \in A$, $f(x+\alpha) = f(x)$ e $\alpha$ è il più piccolo numero reale positivo per cui ciò succede.

Grafico di $tg\,x$ in $(-\pi/2, \pi/2)$




$tg(x) = -tg\,x$ : simm. risp. O

funzione dispari

funzione crescente

VERIFICARLO!

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ : • è periodica di periodo $\pi$ come visto parlando di periodo. Inoltre:

• $\operatorname{tg}(-x) = \dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$

$\Rightarrow$ tg è una funzione dispari

• è definita quando $\cos x \neq 0$ cioè

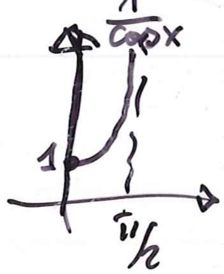
per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. $\Rightarrow$ I.D. $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

mi basta trovare il grafico in $[0, \pi/2)$

È monotona in $[0, \pi/2)$. Infatti

su $[0, \frac{\pi}{2})$: $\operatorname{sen} x$ è crescente

$\cos x$ è decrescente




$\dfrac{1}{\cos x}$ è crescente (composizione di funzioni decrescenti).

$\operatorname{sen} x \cdot \dfrac{1}{\cos x}$ è crescente

in quanto prod. di funz. crescenti e positive:

se $0 \leq x_1 < x_2 < \pi/2$ e $f, g$ crescenti in $[0, \pi/2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 < g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_1) \\ 0 < f(x_2)g(x_1) < f(x_2)g(x_2) \end{cases}$

$\Rightarrow 0 < f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2)$