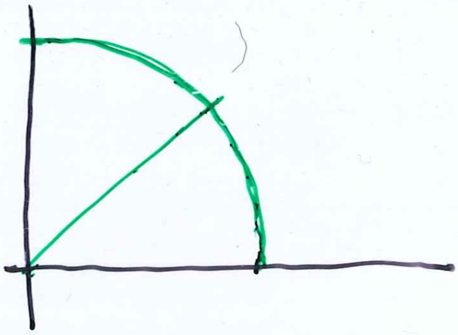
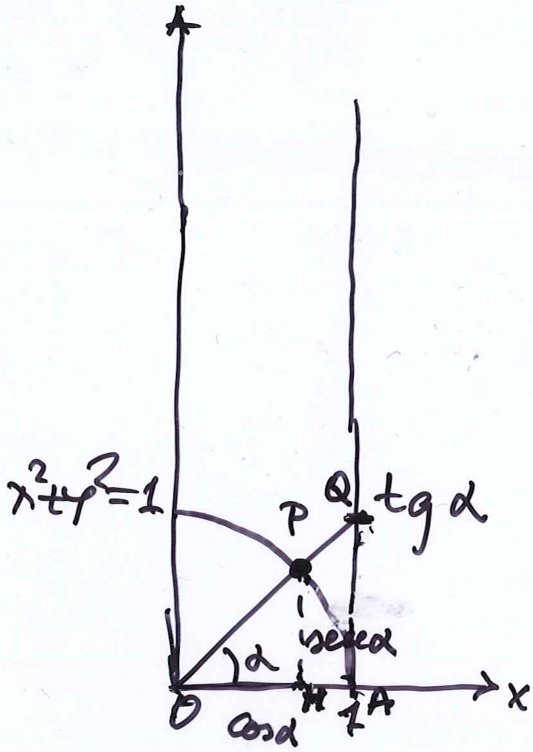


Commento a un lucido già "postato" ieri che illustra la costruzione del grafico della tangente.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

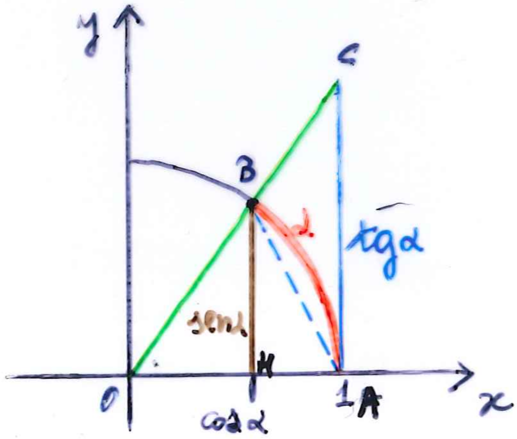
QOA è triangolo simile a POH (poiché entrambi rettangoli con ang. acuto di misura α)

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} \implies \underbrace{\frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}}_{=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \underbrace{\frac{\overline{QA}}{\overline{OA}}}_{=\frac{\overline{QA}}{1}}$$

OSS. $\forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ risulta

$$0 < \operatorname{sen}\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha .$$

Basta guardare al significato di $\operatorname{sen}\alpha$, α, $\operatorname{tg}\alpha$ in relazione alla circonferenza unitaria *



$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}\alpha < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha$$

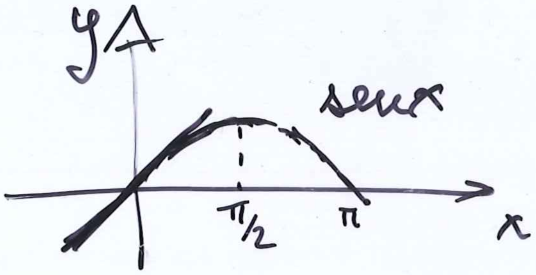
Dividendo per $\operatorname{sen}\alpha$ la disuguaglianza può essere riletta come

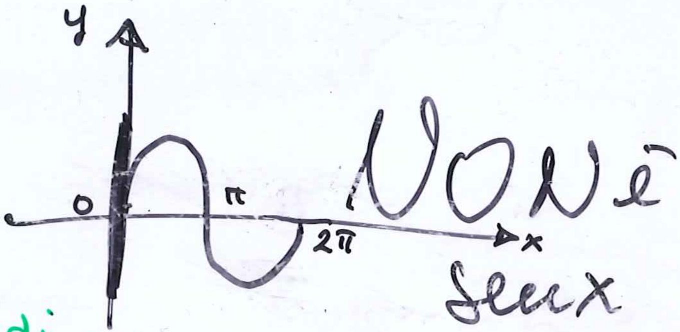
$$1 < \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

cioè $\quad \cos\alpha < \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < 1$

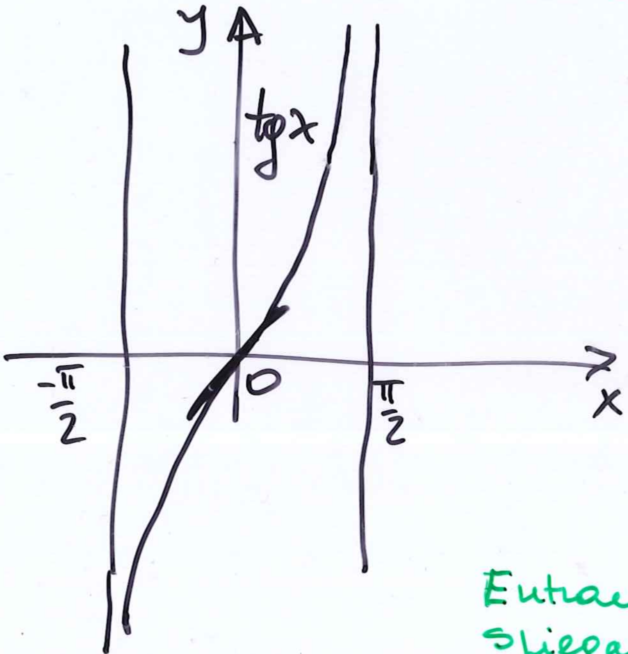
Queste disuguaglianze continuano a valere anche per $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

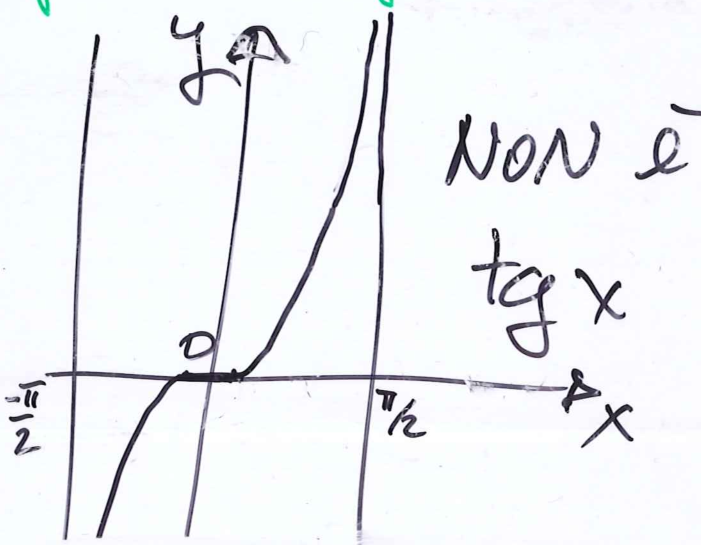
(* Area del cerchio di raggio 1 : π
" del settore circolare sotteso da un angolo al centro di α rad. : $\frac{\alpha}{2}$
Area triangolo esterno : $\frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha$
" " interno : $\frac{1}{2} \operatorname{sen}\alpha$





Problema di ...
come i grafici di sen x e tg x "entrano" in (0,0)





Entrano come $f(x) = x$ poiché, come spiegato al lucido 60, quando x è abbastanza piccolo $\operatorname{sen} x$, x, $\operatorname{tg} x$ "si confondono"

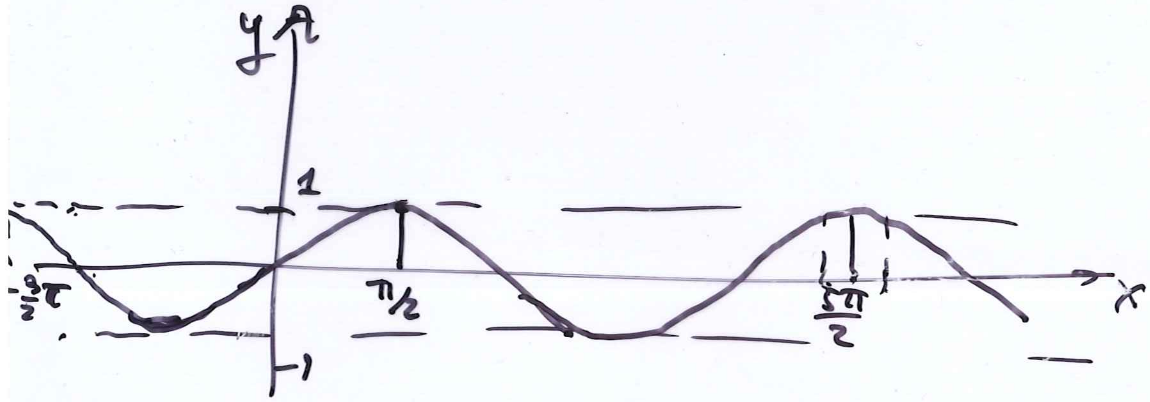
---

una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ limitata ($A \subseteq \mathbb{R}$)

su A è dotata di estremo superiore ed estremo inferiore definiti rispettivamente come $\operatorname{Sup} f(A)$ e $\operatorname{Inf} f(A)$ (in quanto vale il teor. dell'estr. sup.)

Se l'estremo superiore di $f(A)$ appartiene a $f(A)$, cioè se $\exists\, \bar{x} \in A$ t.c. $f(\bar{x}) = \operatorname{Sup} f(A)$ allora dico che la funzione ha massimo assoluto $f(\bar{x})$ e chiamo $\bar{x}$ punto di MAX assoluto.

Se la funz. è inf. limitata ed esiste $\bar{x} \in A$ t.c. $f(\bar{x}) = \inf f(A)$ allora dico che la funz. ha minimo assoluto $f(\bar{x})$ e che $\bar{x}$ è punto di minimo assoluto

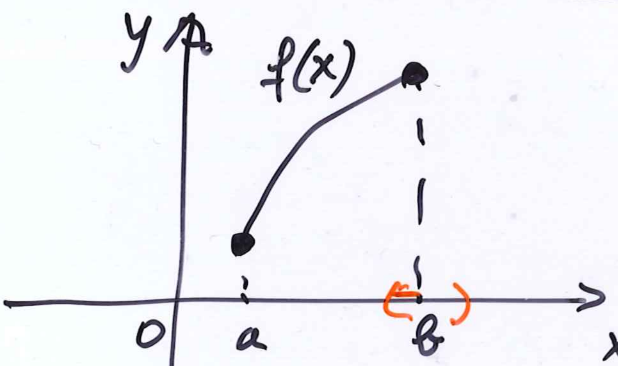


$\text{sen}\, x$ assume il valore $1 = \sup(\text{sen}(\mathbb{R}))$ in tutti i punti della forma

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ci sono infiniti punti di max assoluto ma 1 solo massimo assoluto: 1.

ecc. aggiustare per il minimo

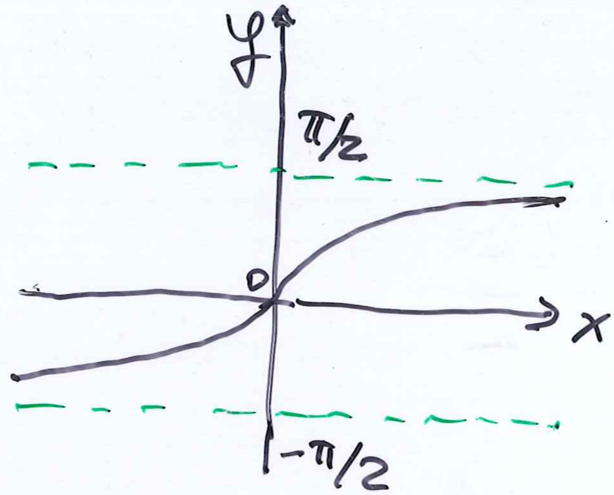


$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\text{Max} f = f(b)$; $\bar{x} = b$

$\min f = f(a)$; $\bar{x} = a$

Questi $\bar{x}$ non sono max (o min.) relativi poiché non esiste un intervallo aperto contenente $\bar{x}$ e contenuto in $[a,b]$ relativamente al quale $\bar{x}$ sia punto di MAX (o min) assoluto.



vedi lucido successivo

arctg x

è funzione limitata:

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

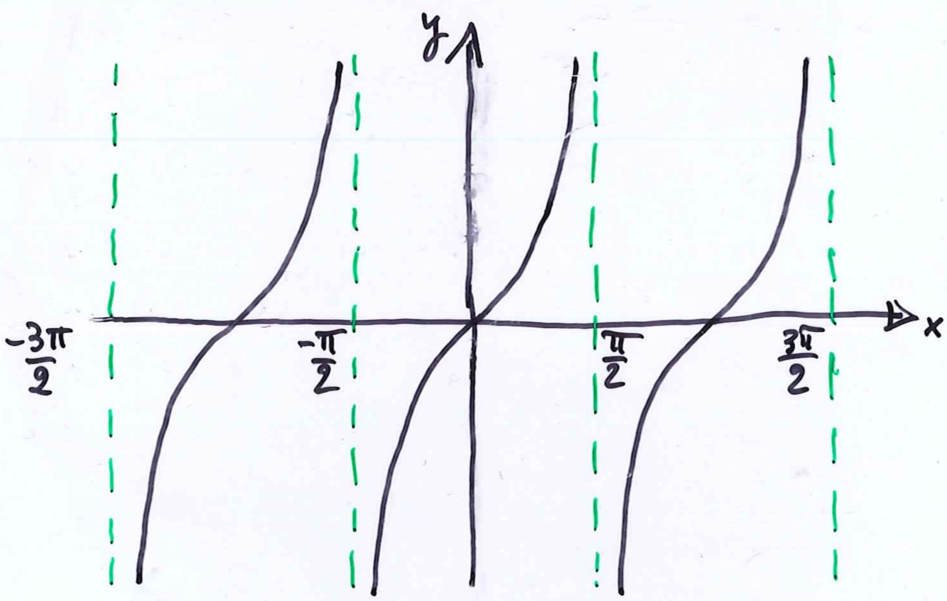
$\exists \ \operatorname{Sup}(\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2}$

$\exists \ \operatorname{Inf}(\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}$

ma questi non sono Max (min) poiché $\pm \frac{\pi}{2} \notin \operatorname{arctg} \mathbb{R}$

Inserire lucido successivo!!!

la tangente è, su ciascun intervallo su cui è definita, monotona cresc.



Se voglio l'inversa in $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ basta prendere $\operatorname{arctg} x + k\pi$

$f(x) = x^{\alpha}$ $\quad$ A= $\quad$ B=

$f(x) = 2^x$

$f(x) = a^x$

$f(x) = \text{sen}\, x$??

TEOREMA: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \overset{B\subseteq}{\mathbb{R}}$ è invertibile se e solo se è BIUNIVOCA cioè

$\forall\, x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (INIETT.)

$\forall\, y \in B \Rightarrow \exists\, x \in A$ t.c. $f(x) = y$. (SURIETT)

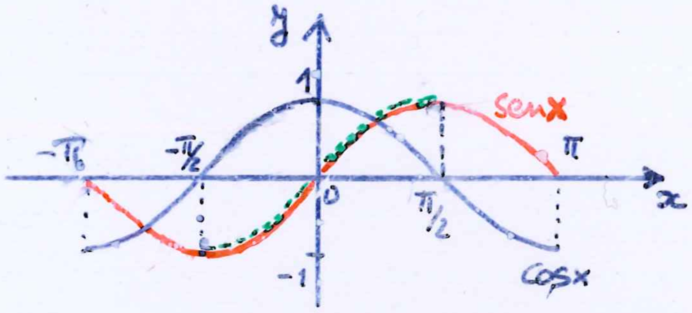
Tutte le funzioni trigonometriche sono periodiche.

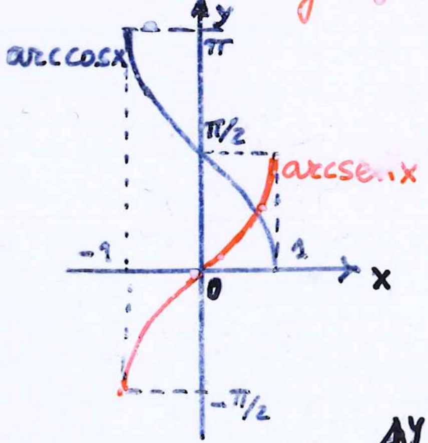
$\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\, x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\cos\,(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\text{tg}\,(x + k\pi) = \text{tg}\, x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ e quindi non iniettive

Dunque l'inversione SI PAGA. Bisogna restringere il dominio

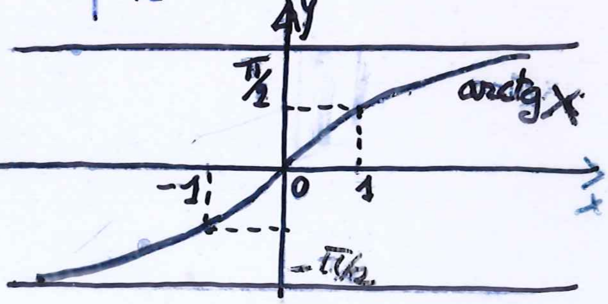


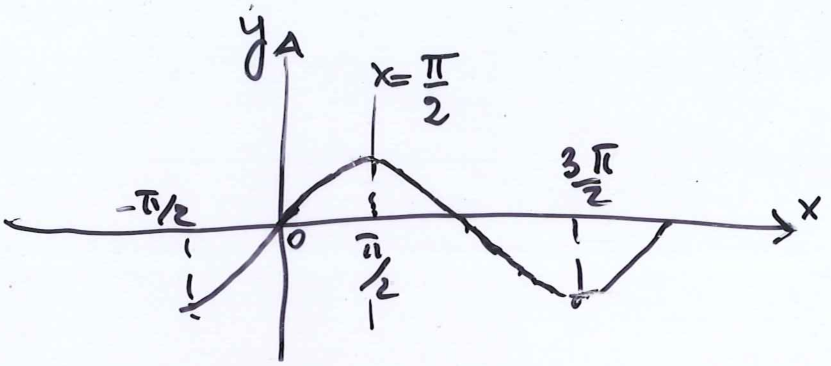


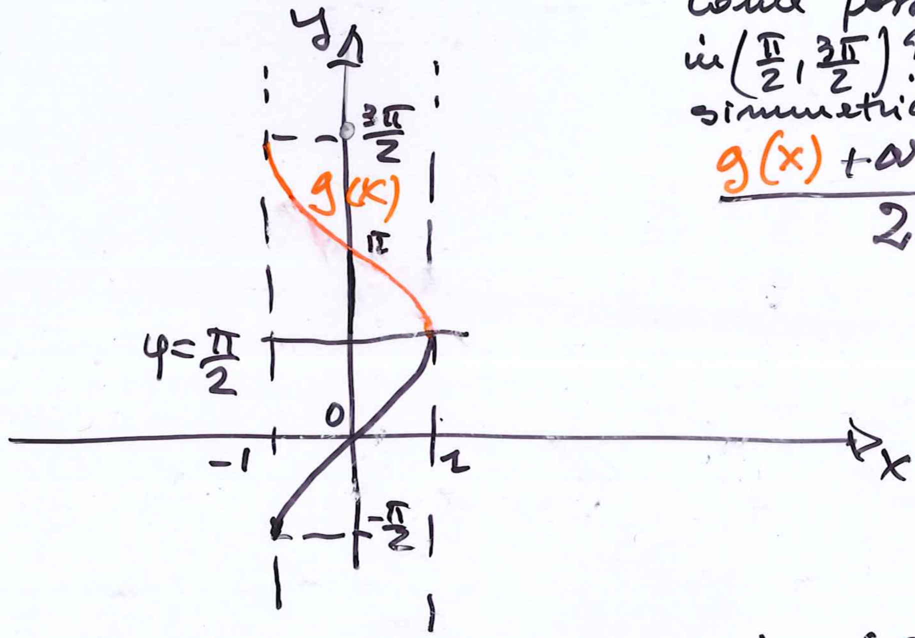
arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$

arcsen : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

arctg : $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$







Come posso invertire sen x in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$? osservo che sen x è simmetrica rispetto a $x=\pi/2$ $\Rightarrow$

$$\frac{g(x) + \text{arcsen}\,x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = \pi - \text{arcsen}\,x$$

Quindi se inverto in $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ uso $\text{arcsen}\,x + 2k\pi$

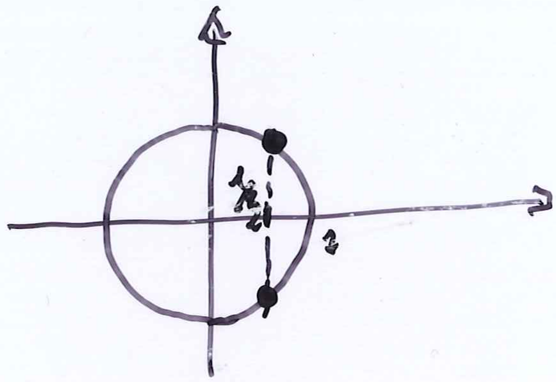
Se inverto in $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$ uso $(\pi - \text{arcsen}\,x) + 2k\pi$

Analogo nel cos x

Inverto su $[-\pi, 0]$ con la funz. $-\arccos x$ e poi traslo . . . .

Soluzione di semplici equazioni trigonometriche.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

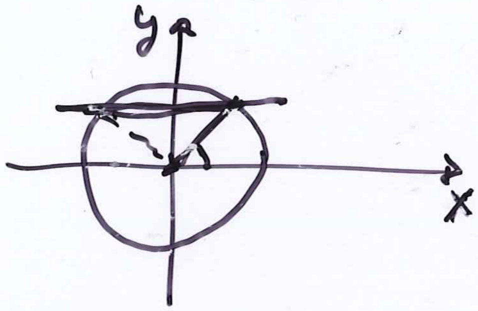
$$\cos x = \frac{1}{4}$$

CALCOLATRICE

$x = \arccos\frac{1}{4} + 2k\pi$

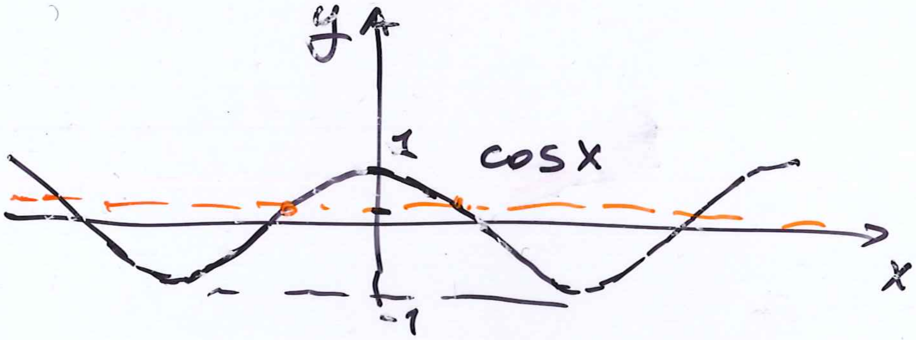
$x = -\arccos\frac{1}{4} + 2k\pi$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



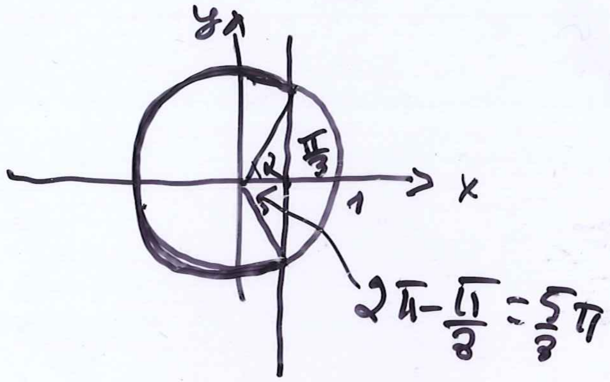
$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$



oppure posso usare il grafico che però non mi aiuta a trovare i punti di intersezione (serve più per le diseq. che per le equaz.)

$\cos x < \frac{1}{2}$



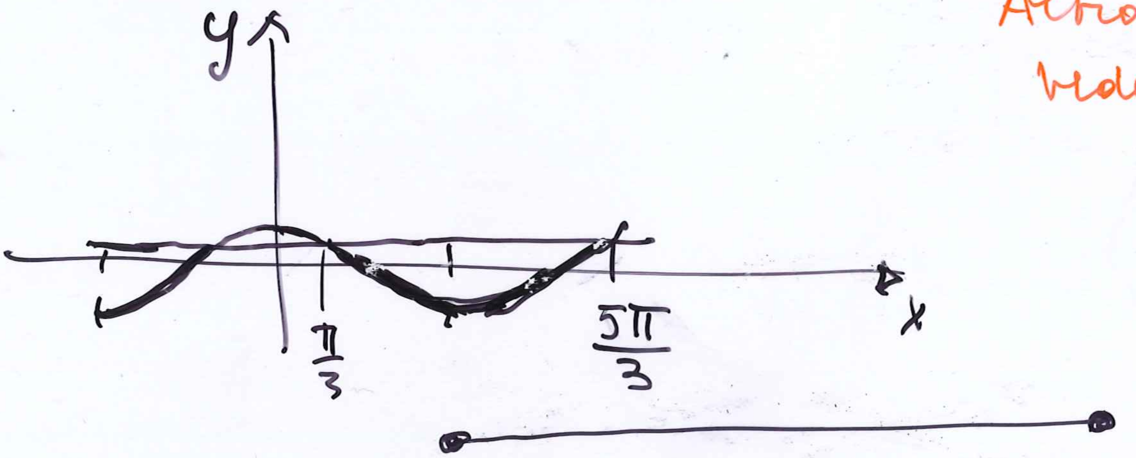
Sulla circonferenza goniometrica cerco i punti P di ascissa $< \frac{1}{2}$ che corrispondono ad archi

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

le soluzioni sono, tenuto conto della periodicità:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,,\, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

Altro modo di vederlo.



$\operatorname{sen} x \geq 1 \iff \operatorname{sen} x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + 3}$ dove è definita?

$\operatorname{sen} x + 3 \geq 2 \Rightarrow$ sempre $\neq 0$

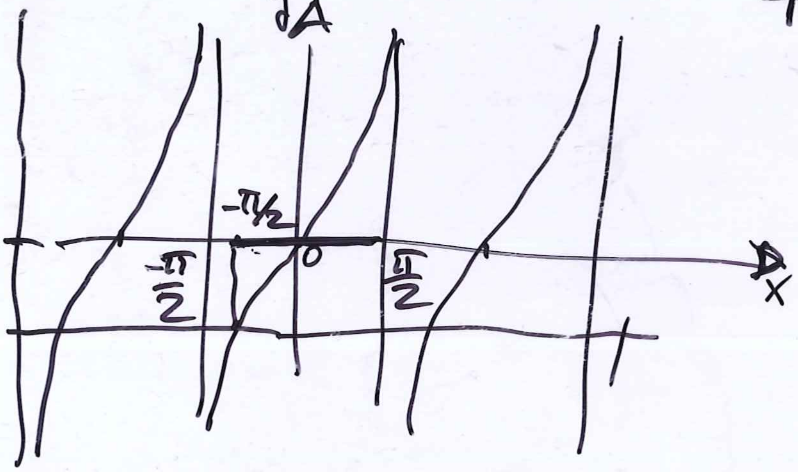
$\Rightarrow f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$

$\operatorname{tg} x \geq -1$

1° Risolvo l'equazione

$\operatorname{tg} x = -1$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$



2° Osservo che in $(-\pi/2, \pi/2)$ e in ogni altro sottointervallo su cui è definita $\operatorname{tg} x$ è crescente $\Rightarrow$ dal grafico leggo che in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la diseg. vale $\forall x \in [-\pi/4, \pi/2)$

3° Globalmente le soluzioni sono

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

(ho tenuto conto del periodo di $\operatorname{tg} x$).

Numeri Complessi

$x^2+1=0$?

"Aggiungiamo" ai numeri reali un SIMBOLO: i

All'incirca: polinomi nell'indeterminata i:

$$\sqrt{2} + 2i - 7i^2 + \frac{1}{\pi} i^3 \quad \dots$$

Ma poniamo

$$\boxed{i^2 = -1}$$
$$i^3 = i \cdot i^2 = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 .$$

$\mathbb{C}$: insieme delle scritture $a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$

- due numeri complessi sono uguali se
  $a+ib = a'+ib' \iff \begin{array}{l} a=a' \\ b=b' \end{array}$

  $z=a+ib$: chiamo a PARTE REALE di z : $\operatorname{Re} z$ e b PARTE IMMAGINARIA di z : $\operatorname{Im} z$
- $(a+ib)+(c+id) = (a+c) + i(b+d)$

- $(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad+bc)$ $\quad i^2=-1$

PROPRIETÀ: le solite algebriche.

zero: $0+0i = 0$

unità: $1+0i$ Infatti: $(a+ib)(1+0i) = a - 0 + i(0+b) = a+ib.$

$-(a+ib) = -a-ib$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i \quad \text{perché:}$$

$$(a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i\right) =$$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) =$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + i\left(\frac{ab-ab}{a^2+b^2}\right) = 1 + 0i$$

Sono invertibili tutti i numeri complessi $\neq 0+0i$

I complessi sono un campo come i reali

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$?

$a+0i \longleftrightarrow a$

$\hat{\mathbb{C}} \longleftrightarrow \mathbb{R}$

la somma di due reali complessi

$(a+0i)+(b+0i) = a+b+0i$ dà il reale compl. che corrisp. ad $a+b$

anche per il prodotto:

$(a+0i)(b+0i) = ab+0i$

Quindi "confondo" e scrivo $a+0i = a$.