Come rappresentare in forma algebrica:

$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = (1-i\sqrt{3})\frac{1}{1+i} \in \mathbb{C},$$

Ricordo che

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ e quindi

$(1+i)(1-i) = 1^2-(i)^2 = 1-(-1) = 2$

$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{2} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{(-1-\sqrt{3})}{2}$$

Coniugio

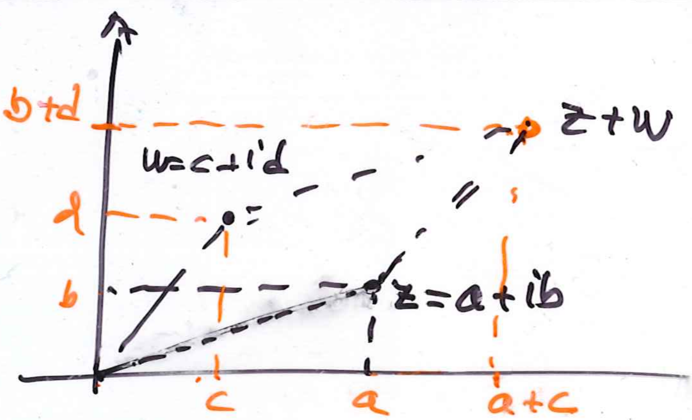
$$z = a+ib \longmapsto \bar{z} = a-ib$$

z coniugato

Prima ho visto che:

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2+b^2$$

Che cosa rappresenta a^2+b^2? Lo vedremo poi.



inserire qui il lucido C2 con la def della forma cartesiana e il piano di A.G.

La somma di due numeri complessi z e w è praticamente la somma con la regola del parallelogramma dei 2 vettori che congiungono 0 con z e con w.

C2

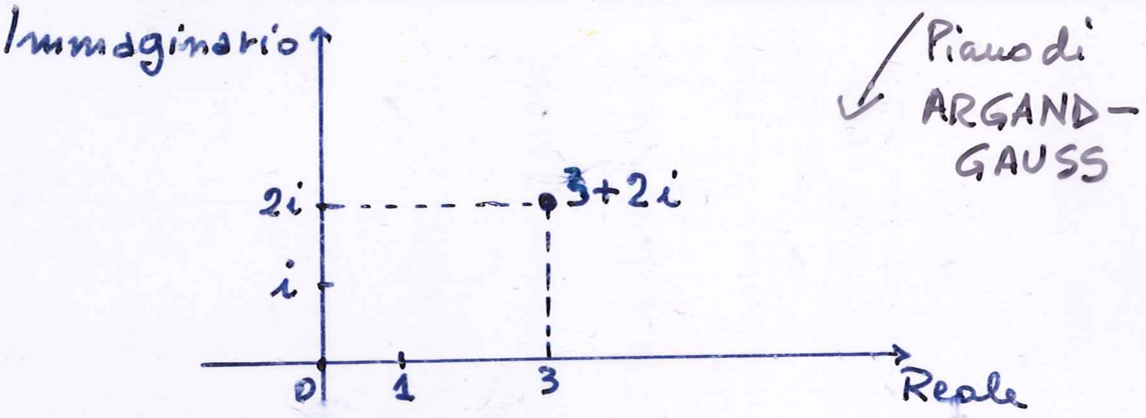
$\mathbb{C}$ è un campo che "contiene $\mathbb{R}$": $\{a+i0\}$

Identifichiamo $\underline{a}$ con $\underline{\underline{a+i0}}$ (le operazioni definite su $\mathbb{C}$ ristrette al s.i. dei complessi reali si comportano come quelle su $\mathbb{R}$]

Questa è la FORMA ALGEBRICA dei numeri complessi.

Corrispondentemente: FORMA CARTESIANA

$$a+ib \longleftrightarrow (a,b)$$



Somma ?

Zero ?

Prodotto ??? $\longrightarrow$ serve passare a coordinate polari

Parte reale di $z=a+ib$: $\mathrm{Re}\, z = a$

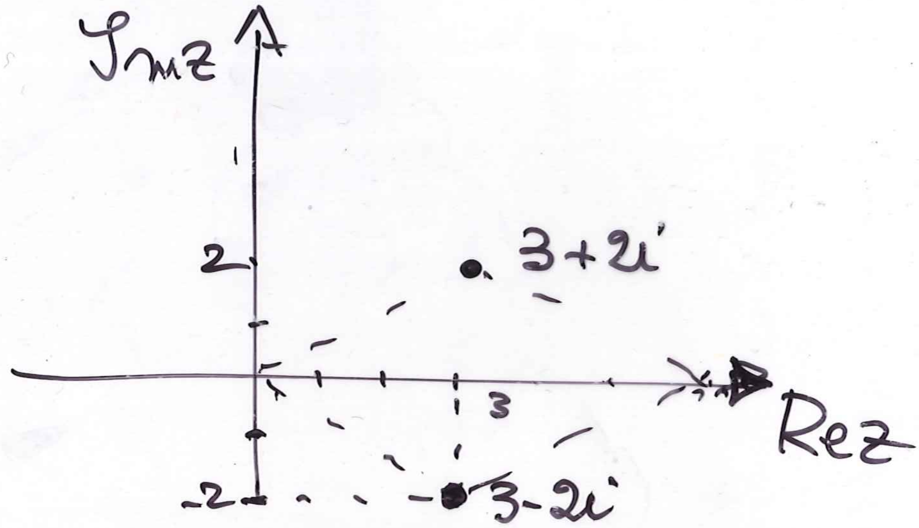
Parte immaginaria di z : $\mathrm{Im}\, z = b$

Coniugato di z : $\bar{z} = a-ib = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z$

Modulo di z: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

Esempio

$z = 3 + 2i \qquad \bar{z} = 3 - 2i$



Nel piano di A.G. questa è la posizione di $\bar{z}$ rispetto a z

Modulo di z: $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} =$

$=$ distanza di z da 0 ≥ 0

ATTENZIONE!

$$z + \bar{z} = (\mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z) + (\mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z) =$$
$$= 2\, \mathrm{Re}\, z$$

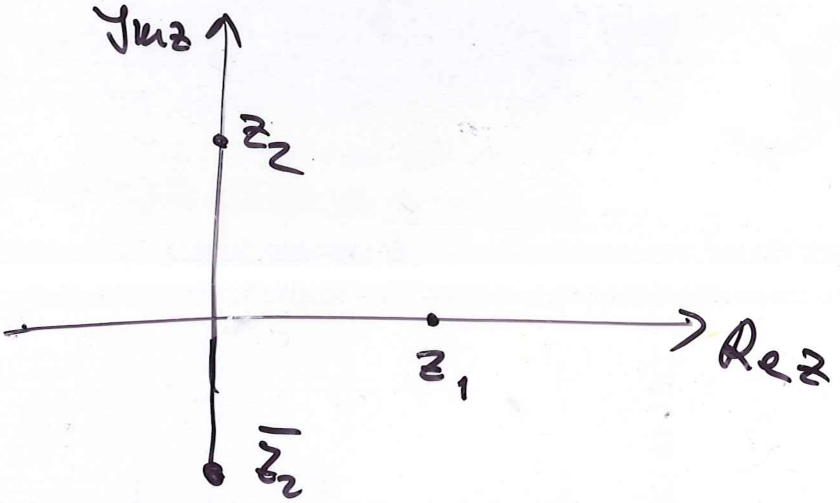
$$z - \bar{z} = 2i\, \mathrm{Im}\, z$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \mathrm{Re}(z_1 + z_2) - i\, \mathrm{Im}(z_1 + z_2) =$$
$$= \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2 - i(\mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2) =$$
$$= (\mathrm{Re}\, z_1 - i\, \mathrm{Im}\, z_1) + (\mathrm{Re}\, z_2 - i\, \mathrm{Im}\, z_2)$$
$$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar z} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar z_1}{\bar z_2}$$

$$z\cdot\bar z = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 = |z|^2$$



$$\mathrm{Re}\, z_1 = z_1$$

$$\Rightarrow \bar z_1 = z_1$$

$$\Rightarrow |z_1| = \begin{cases} z_1 & \text{se } z_1 \geq 0 \\ -z_1 & \text{se } z_1 < 0 \end{cases}$$

$$z_2 = i\,\mathrm{Im}\, z_2 \Rightarrow \bar z_2 = -i\,\mathrm{Im}\, z_2$$

$$\Rightarrow |z_2| = \begin{cases} \mathrm{Im}\, z_2 & \text{se } \mathrm{Im}\, z_2 \geq 0 \\ -\mathrm{Im}\, z_2 & \text{se } \mathrm{Im}\, z_2 < 0 \end{cases}$$

$$|\bar z| = |z|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$z_1 = a + ib$

$z_2 = c + id$

$$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + i(ad + bc)$$

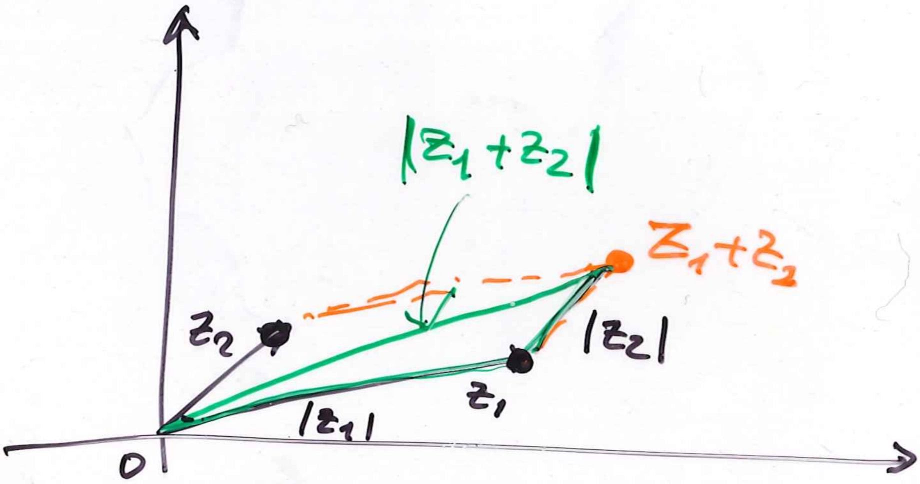
$$\Downarrow$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$$

$$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$$

$$|z_1||z_2| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$$

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$ disuguaglianza triangolare



la somma di 2 lati del triangolo $0, z_1, (z_1+z_2)$ è $\geq$ del terzo lato

$$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leq |z_1+z_2|$$ la differenza di 2 lati è (in modulo) minore o uguale al terzo

Nei numeri complessi c'è una relazione d'ordine? ....

$\downarrow$

che rispetti somma e prodotto?

NO. Se esistesse tale relazione, $>$, potrei considerare i e 0 : se $i>0$ anche $i^2>0$ poiché:

$i \cdot i > 0 \cdot i > 0 \cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 > 0$ (??)

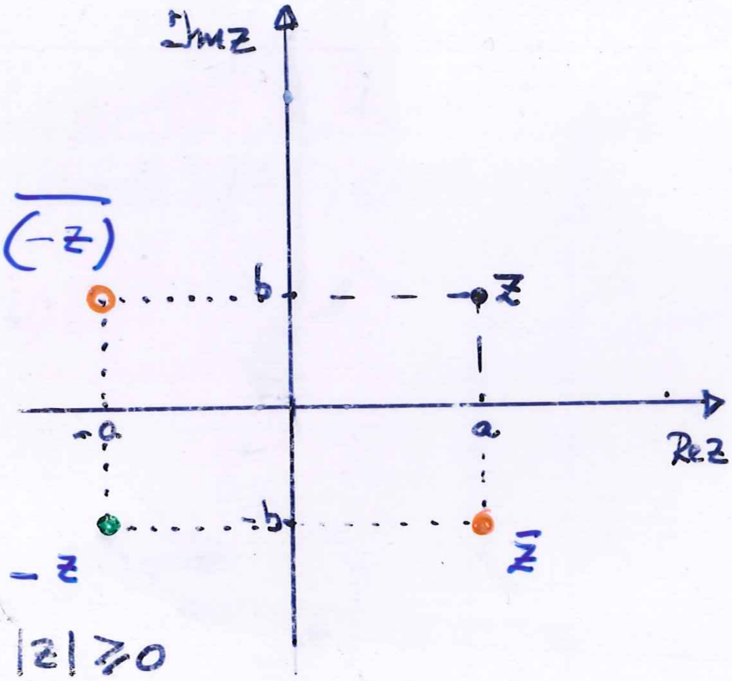
ancora:

$-1 \cdot i = -i > 0$

$0 = i + (-i) > 0$ ASSURDO

C3

Proprietà: $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ $\qquad z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$



$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\overline{(\mathrm{Re}\,z)} = \mathrm{Re}\,z$

$\overline{i(\mathrm{Im}\,z)} = -(\mathrm{Im}\,z)\,i$

$|z| \geq 0$

$|\bar{z}| = |z|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

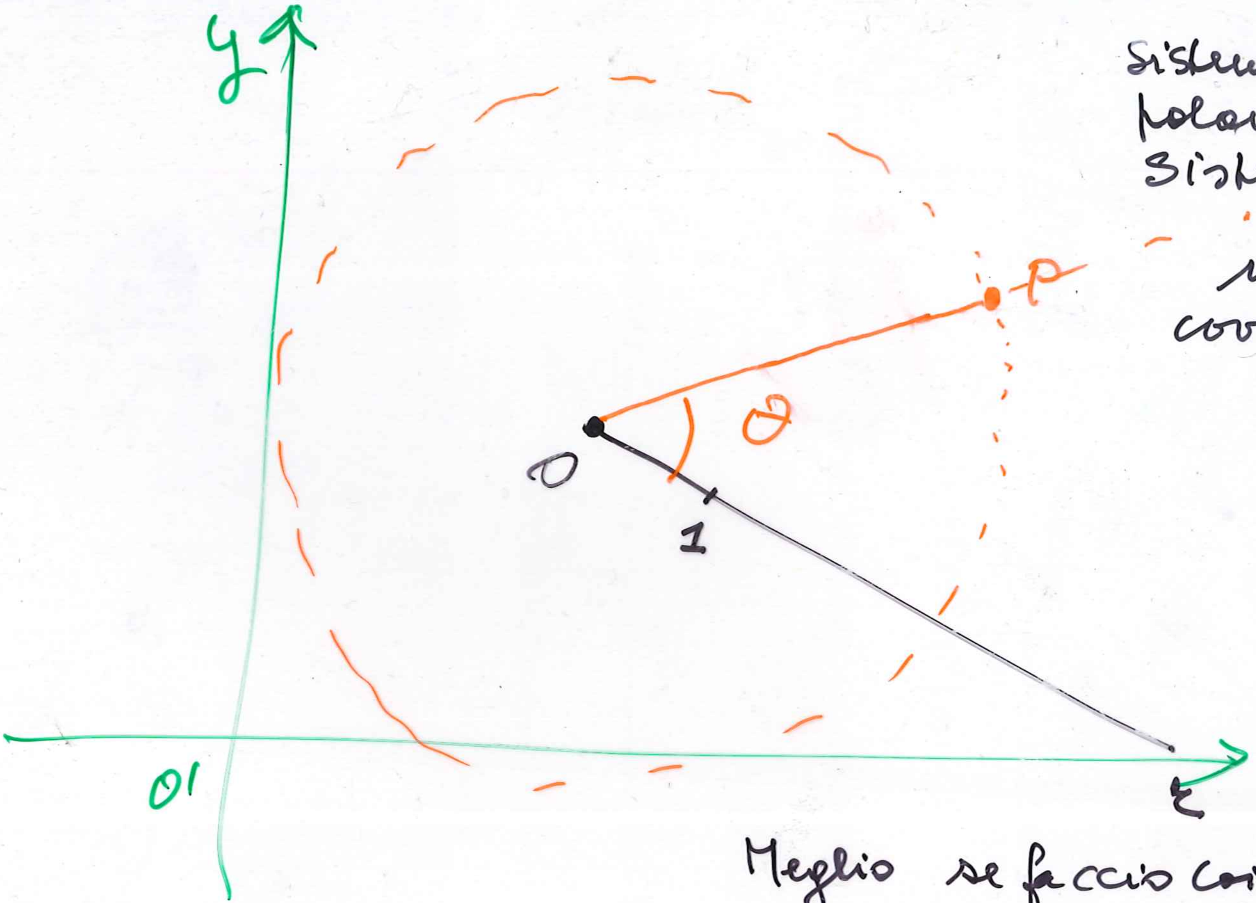
$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leq |z_1 + z_2|$

Trovare la forma algebrica di $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

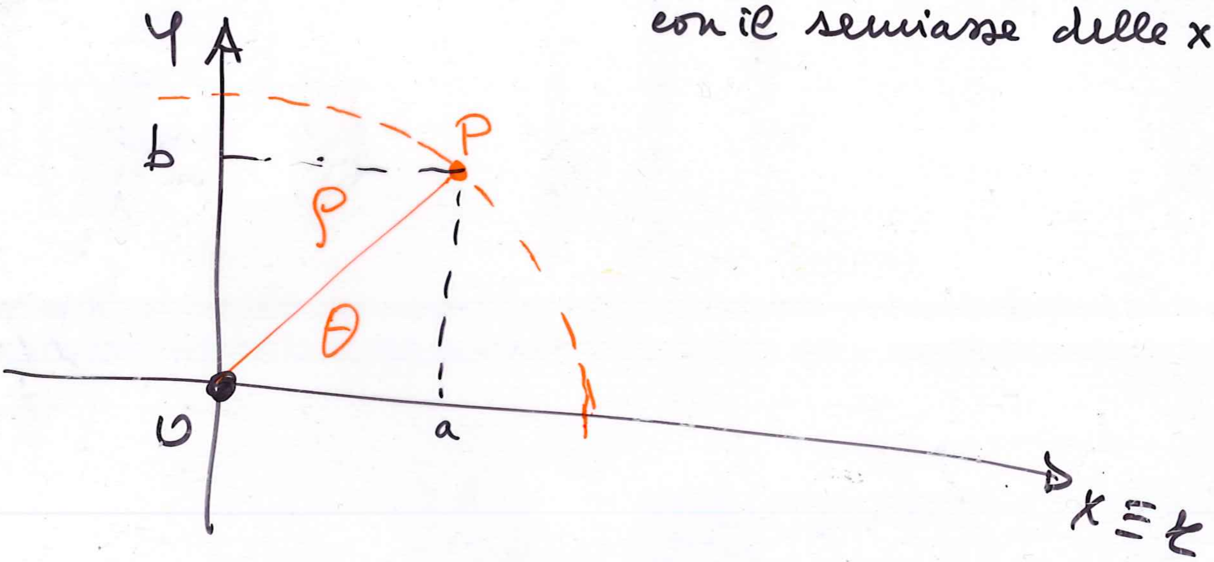
Quindi $\mathrm{Re}\,z =$ $\qquad \mathrm{Im}\,z =$

$\bar{z} =$ $\qquad |z| =$



Sistema polare e sistema cartesiano non correlati

Meglio se faccio coincidere O con O' e la semiretta r con il semiasse delle $x > 0$



$$\Rightarrow \quad a = \rho \cos\theta \qquad \Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

$$b = \rho \,\text{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho}$$

$$a^2 + b^2 = \rho^2$$

L'unico punto non ben rappresentato è O:

$\rho = 0$, θ ?? (ci sono ∞ rette passanti per O e O)

Praticamente:

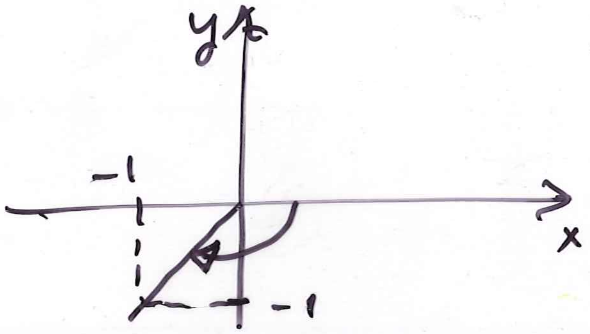
$(-1,-1)$ nel piano con sistema cartesiano

chi è ρ?
chi è θ?

$$-1 = \rho \cos\theta$$
$$-1 = \rho \operatorname{sen}\theta$$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad -1 = \sqrt{2}\cos\theta, \qquad -1 = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta \qquad \Rightarrow \quad \theta \, ?$$



$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\theta = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$
con $k \in \mathbb{Z}$

ATTENZIONE PERÒ:

$$(-1,-1) \longmapsto \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)$$

non è una funzione!

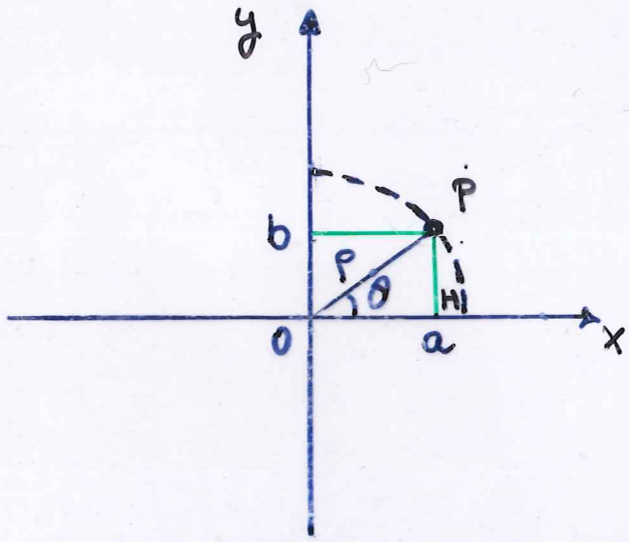
di solito si sceglie di prendere $\theta \in (-\pi, \pi]$

$(-1,-1) \longmapsto \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi\right)$ ho una funzione:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$$

riferimento cartesiano $\qquad$ riferimento polare

COORDINATE POLARI



$a = \rho \cos\theta$

$b = \rho \operatorname{sen}\theta$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta =$??

individuato "modulo 2π"

Argomento di z

Argomento principale di z

$-\pi < \theta \leq \pi$

$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$: FORMA TRIGONOMETRICA

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\left(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)\right)$$

GRAFICAMENTE ?

Trovare argomento principale e modulo di:

10 , $3i$, $1+i$, $\sqrt{3}+i$, $1-\sqrt{3}i$

$$z \cdot w = (\mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z)\cdot(\mathrm{Re}\,w + i\,\mathrm{Im}\,w) =$$
$$= (\mathrm{Re}\,z \cdot \mathrm{Re}\,w - \mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,w) + i\,(\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{Im}\,w + \mathrm{Re}\,w\,\mathrm{Im}\,z)$$

$$z = \rho_1\,(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$$

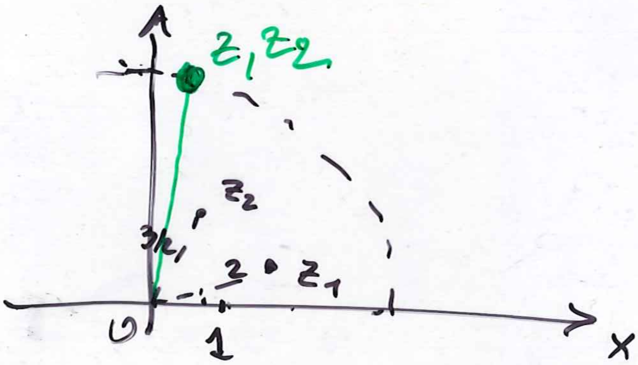
$$w = \rho_2\,(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

$$zw = \rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\right] =$$

$$= \rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i\,(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)\right] =$$

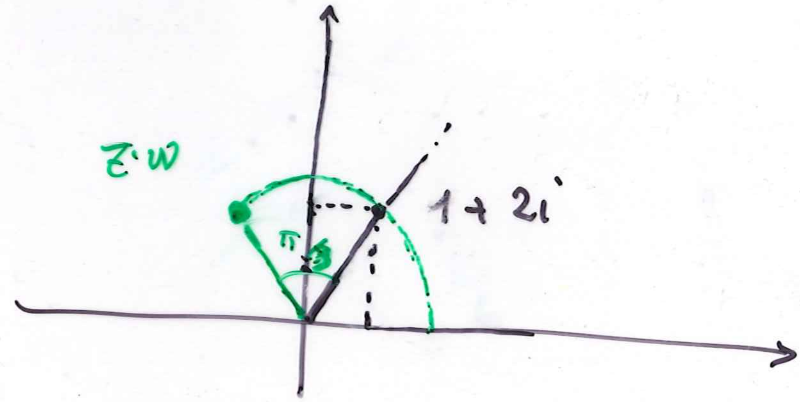
$$= \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right]$$

il prod. di 2 num. complessi è un num. che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.



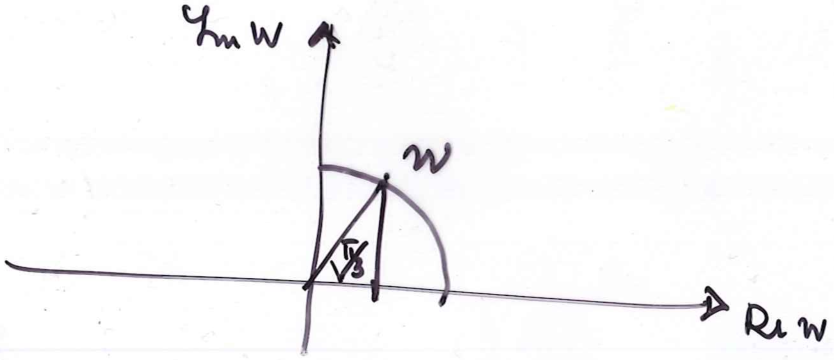
$z = (1+2i) \qquad w = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$z \cdot w$?



$|w| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \qquad |z| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$|zw| = |z| \cdot |w| = \sqrt{5}$, $\arg zw = \arg z + \frac{\pi}{3}$



moltiplicare per un numero di modulo 1 e argomento arg w significa operare una rotazione di z lungo la circonf. di raggio |z| e centro O di un angolo pari arg w.

$$z = \rho(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$

$$= \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

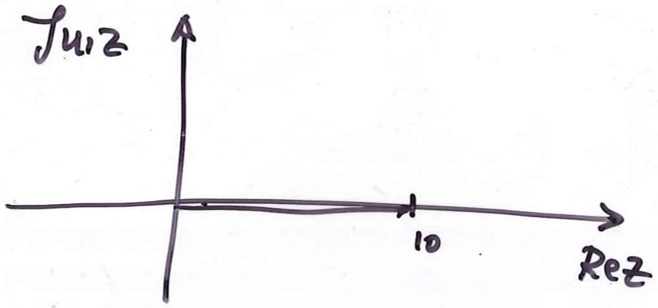
$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\bar{z}}{\rho}\right) = \frac{\bar{z}}{\rho^2}$$

$z \cdot \frac{1}{z} = 1$ che ha modulo 1 e argom. 0 $\Rightarrow \frac{1}{z}$ deve avere modulo $\frac{1}{\rho}$ e argomento $0 - \theta = -\theta$

$z = 10 \longrightarrow |z| = 10$

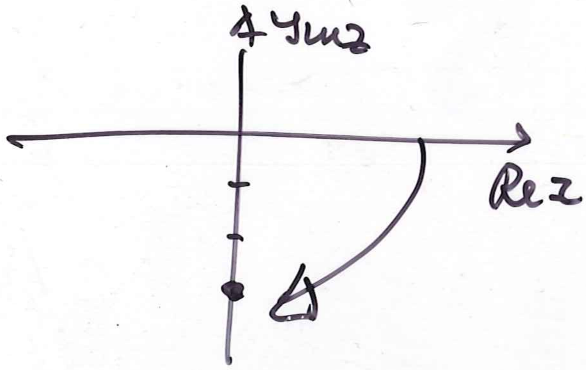
$\arg z = 0$ (principale)

altri argomenti: $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



$z = -3i$ $\quad |z| = 3$

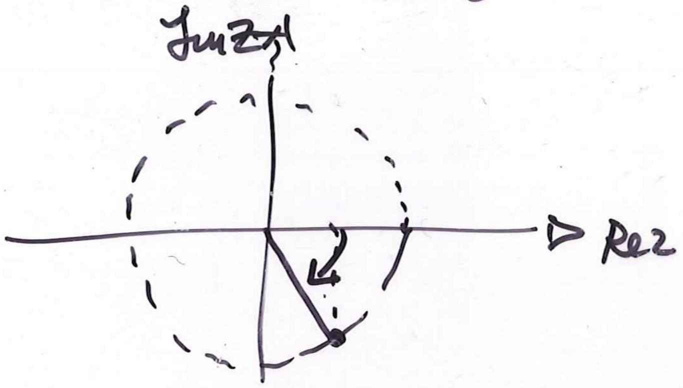
$\arg z = -\frac{\pi}{2}$ princ.



gli altri argomenti sono

$-\pi/2 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$z = 1 - \sqrt{3}\, i$



$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\arg z = -\frac{\pi}{3}$ princip.

gli altri sono

$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$1+i$, $\sqrt{3}+i$?

Rifare i conti!

$$z = \rho\,(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$z^2 = \rho\cdot\rho\,(\cos(\theta+\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\theta))$$

$$= \rho^2\,(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\, 2\theta)$$

$$z^3 = z\cdot z^2 = \rho\cdot\rho^2\,(\cos(\theta+2\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta+2\theta))$$

$$= \rho^3\,(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta)$$

$\vdots$

$$z^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta).$$

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{24} = 1^{24}\left(\cos\left(24\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(24\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= (\cos 8\pi + i\,\mathrm{sen}\, 8\pi)$$

$$= 1$$

$|z| = 1$

$\arg z = \frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ è una radice 24-ma di 1 (?)