ultimi risultati della lezione precedente

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$w = \rho'(\cos\theta' + i\,\mathrm{sen}\,\theta')$$

$$zw = \rho\rho'\left(\cos(\theta+\theta') + i\,\mathrm{sen}(\theta+\theta')\right)$$

vedi formule di somma di seno e coseno.

$$z^2 = \rho^2\left(\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta)\right)$$

rimeditazioni sulla trigonometria

[In particolare: formule di duplicazione

$$\cos 2\theta = (\cos\theta)^2 - (\mathrm{sen}\,\theta)^2 =$$

$(\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \Rightarrow$

$$\overset{(1)}{=} 2(\cos\theta)^2 - 1 =$$

$$\overset{(2)}{=} 1 - 2(\mathrm{sen}\,\theta)^2$$

$\Downarrow$ formule di bisezione (DA NON USARE MAI con equazioni) → $x = 2t$ e usare le form. di duplicaz.

$$(\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

C5

$$z^2 = \rho^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

$\vdots$

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Es. $(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3 \left(\cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} 3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 8i$

VERO?

$=$

Viceversa. cioè l'equazione $z^n = w$ ha n soluz.

Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Esistono esattamente n radici n-esime complesse: $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ di w.

Se $w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

e $z_k = \rho_k (\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$

ρ_k, θ_k incognite.

Se $z_k^n = w$ allora

si ha:

$\rho_k = r^{1/n}$ $\quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1$

$\theta_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $\quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1$

Sono tutte distinte

NON ce ne sono altre.

Esempi:

radice cubica di 1:

rappresentazione grafica:

SPIEGAZIONE del teorema di esistenza di n radici n-esime di un num. compl.

Trovare un numero complesso

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

tale che $z^n = w$

ove $w = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ è un numero complesso assegnato.

(φ, θ sono incognite

r, φ sono assegnate)

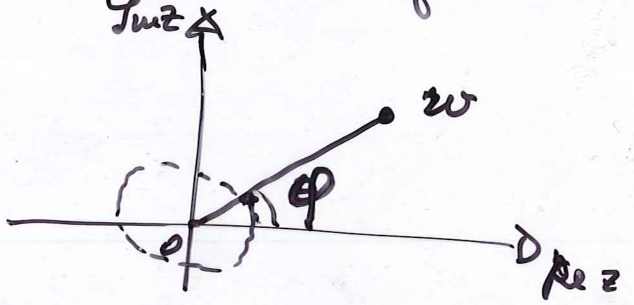
questo è il nostro problema

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$

VOGLIO CHE $\parallel$

$$w = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

Quando sono = due numeri rappresentati in forma trigonometrica?



$r \in (0, +\infty)$

Il modulo dei 2 numeri deve essere uguale: $\rho^n = r$

$\Rightarrow$ teor. dell'esist. della radici n-esime aritm. di un num reale: $\exists$ 1 e 1 sola soluz di $\rho^n = r$: $\rho = \sqrt[n]{r}$

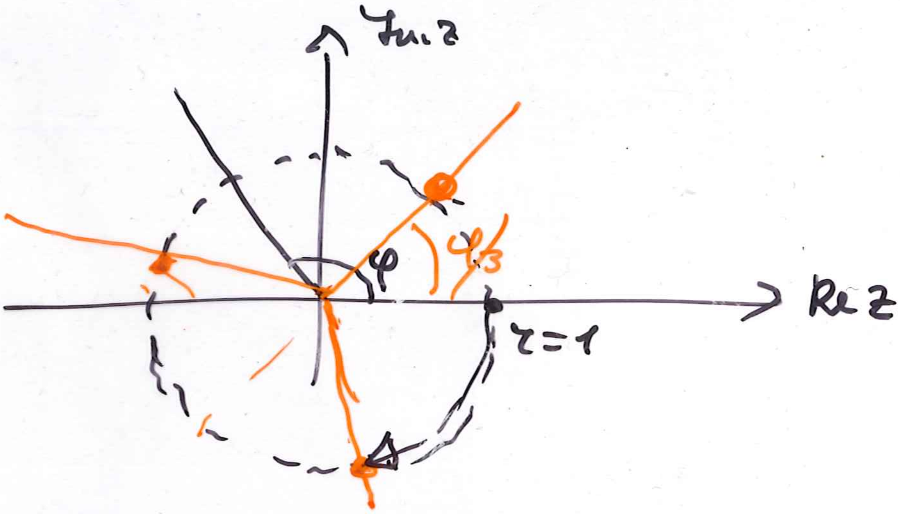
Circa l'angolo deve succedere che

$$n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}$$

sono infiniti. Ma corrispondono a ∞ numeri complessi?

Vediamolo su un esempio:

$n=3$



$\varphi/3$, $\varphi/3+\frac{2\pi}{3}$, $\varphi/3+\frac{4\pi}{3}$

$k=0$ $\quad$ $k=1$ $\quad$ $k=2$

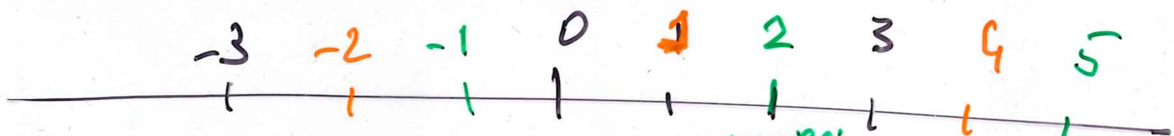
$\cancel{\varphi/3}+\frac{6\pi}{3}=\varphi/3+2\pi$ $\quad$ $k=3$: corrisponde al caso $k=0$

$\varphi/3+\frac{8\pi}{3}=\varphi/3+2\pi+\frac{2\pi}{3}$ $\quad$ $k=4$: corrisponde al caso $k=1$

$k=-1$? $\quad$ $\varphi/3-\frac{2\pi}{3}$ $\quad$ corrisponde al caso $k=2$

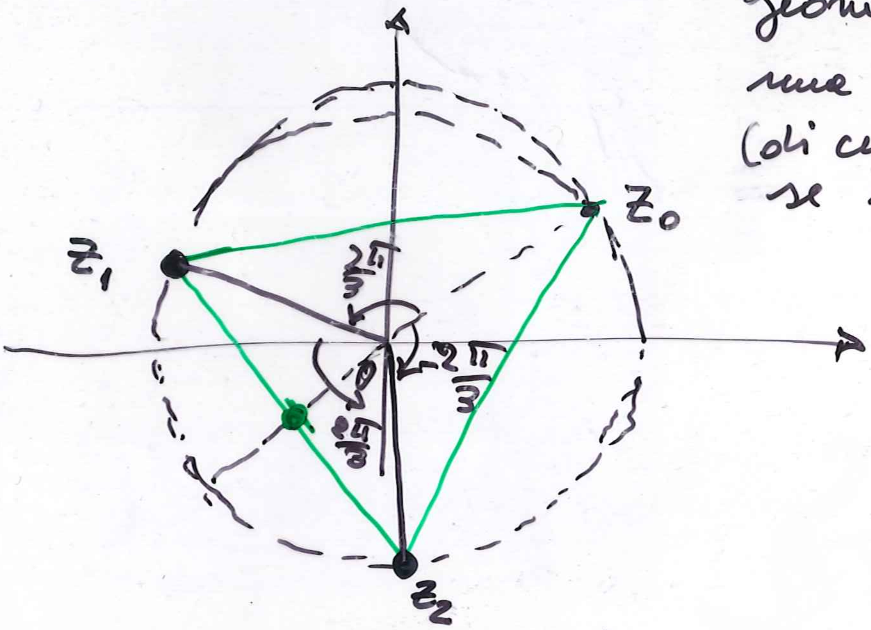
Mi basta andare a scegliere 3 valori di k

CONSECUTIVI



Più in generale, visto che i resti possibili della divisione di k per n sono n, se ragiono nello stesso modo vedo che:

Le radici n-esime di un complesso $\neq 0$ sono esattamente n



Geometricamente, se z_0 è una radice terza di w (di cui non so nulla se non che $w = z_0^3$)

dove sono le altre radici terze di w?

Se $w = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ ogni radice 3ª ha forma

$$z_k = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Quindi le "altre radici" sono su una circonferenza centrata in O e di raggio $|z_0|$ e se

- $n=3$ sono ai vertici di un triang. equil. centrato in O,
- $n=4$ quadrato
- $n=5$ pentagono regolare
- $n=6$ esagono regolare ecc.

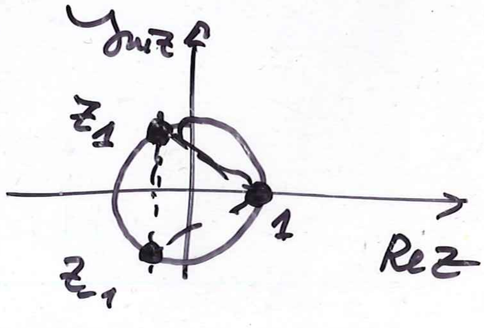
Radici cubiche di $w = 1$?

$|w| = 1$

$\arg w = 0 + 2k\pi$

$n=3$: $z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$k = -1, 0, 1$



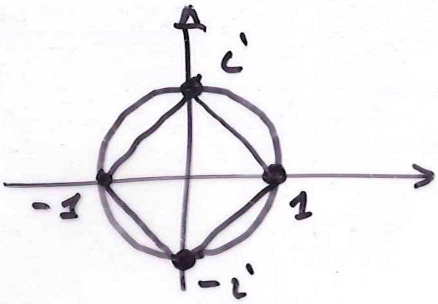
$z_0 = 1$

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

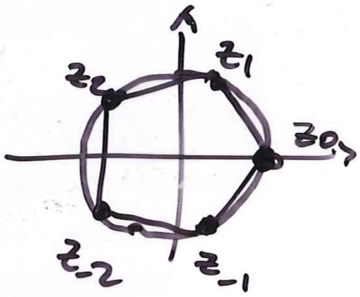
Radici n-esime di 1

$n=4$



$-i = \bar{i}$

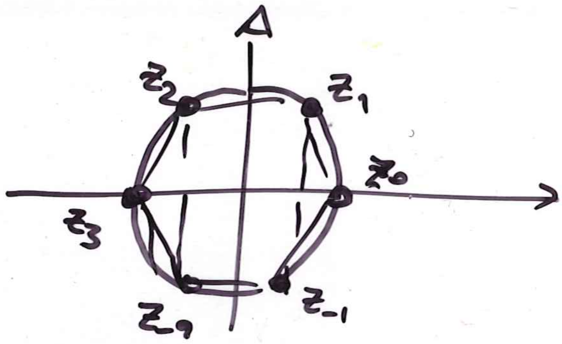
$n=5$



$z_{-1} = \bar{z}_1$

$z_{-2} = \bar{z}_2$

$n=6$



$z_0 = 1$

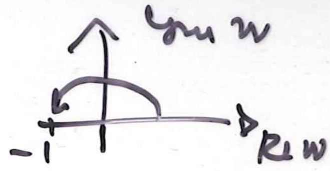
$z_3 = -1$

$z_{-1} = \bar{z}_1$

$z_{-2} = \bar{z}_2$

se una radice giace sull'asse x le altre devono essere simmetriche risp. all'asse x

Radici quarte di -1

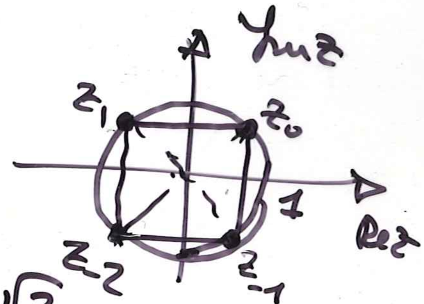


$w = -1$ $\qquad |w| = 1$

$\arg w = \pi + 2k\pi$

$|z_k| = \sqrt[4]{1} = 1$

$\arg z_k = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}$



$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

z_1 è simmetrico di z_0 risp. all'asse Im z

$\Rightarrow \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

z_{-1} è simm. di z_0 risp all'asse Re z

$\Rightarrow z_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

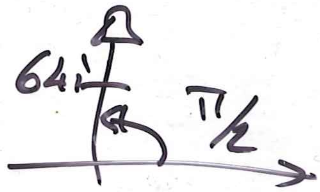
z_{-2} è diametralmente opposto a z_0

$\Rightarrow z_{-2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

Sfrutto le simmetrie che ho letto tracciando prima l'immagine geometrica delle soluzioni per minimizzare i conti

Ma attenzione: non sempre le soluzioni sono simmetriche rispetto agli assi!!
Vedi prossimo esempio

Radice sesta di $64i$ (imm. puro)



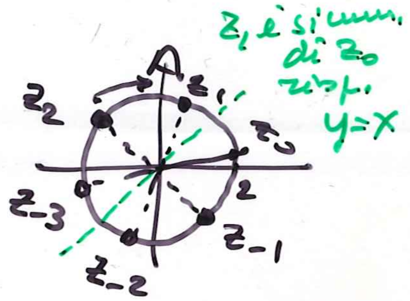
$|64i| = 64$

$\arg(64i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

z_k radice sesta di $64i$

$|z_k| = \sqrt[6]{64} = 2$

$\arg z_k = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$



$k=0 \quad \frac{\pi}{12}$

$k=1 \quad \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$

$k=2 \quad \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi(1+8)}{12} = \frac{3\pi}{4}$

$k=2 \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$z_{-1} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ in quanto diametralm. opposto di z_2

usando la rotazione di $-\frac{\pi}{3}$ (cioè il prodotto di z_2 per $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$) arrivo in z_1

$z_1 = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

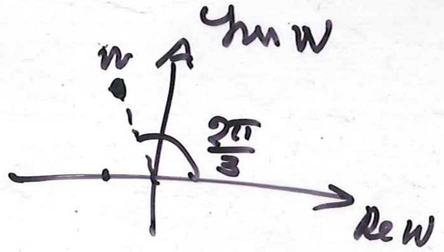
controllo: $|z_1|^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2} + \frac{6}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2+2$ O.K.

$z_{-2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ in quanto diametralm. opp. di z_1

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z_{-3} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

Radici quarte di $w = \sqrt{3}\, i - 1$



$$|w| = \sqrt{3+1} = 2$$

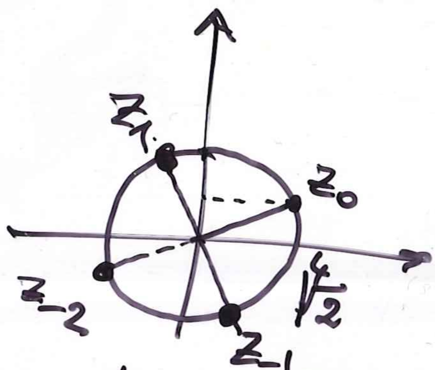
$\arg w = \theta$

$$\begin{cases} \cos\theta = -1/2 \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2 \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Per ciascuna radice quarta

$$|z_k| = \sqrt[4]{2}$$

$$\arg z_k = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$



$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{i}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{9}{8}} + \frac{i}{\sqrt[4]{8}}$$

$$z_{-2} = -\sqrt[4]{\frac{9}{8}} - \frac{i}{\sqrt[4]{8}}$$

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt[4]{8}} + \sqrt[4]{\frac{9}{8}}\, i$$

$$z_{-1} = -z_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - \sqrt[4]{\frac{9}{8}}\, i$$

radice quarta di -1:

rappresentazione grafica:

radice sesta di $64i$

rappresentazione grafica:

radice quarta di $\sqrt{3}i - 1$

rappresentazione grafica:

Teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione polinomiale di grado n a coefficienti complessi ammette esattamente n radici complesse.

Conseguenze del T.F. dell'A.

Polinomi a coeff. reali - complessi

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Ad es. $n=4$

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$\overline{P(x)} = \bar{a}_0 + \overline{a_1 x} + \bar{a}_2 \bar{x}^2 + \bar{a}_3 \bar{x}^3 + \bar{a}_4 \bar{x}^4 =$

$a = a + 0i$
$\bar{a} = a - 0i = a$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

(x è un simbolo, non si "coniuga")

Sia z una radice complessa di $P(x)$, cioè

$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 = 0$

$\bar{z}$ deve essere radice di $\overline{P(x)}$

$a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + a_3 \bar{z}^3 + a_4 \bar{z}^4 = 0$

Se z è soluz di $P(x)$ anche $\bar{z}$ lo è

Supponiamo che le 4 radici trovate siano tutte complesse: esse saranno del tipo

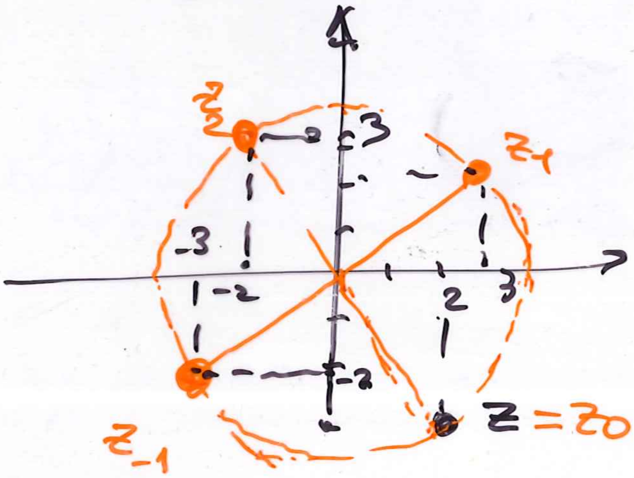
$z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$

$P(x) = a_4 (x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2) =$

$= a_4 (x^2 - \underbrace{(z_1 + \bar{z}_1)}_{2 \operatorname{Re} z_1} x + \underbrace{z_1 \bar{z}_1}_{|z_1|^2})(x^2 - \underbrace{(z_2 + \bar{z}_2)}_{2 \operatorname{Re} z_2} x + \underbrace{z_2 \bar{z}_2}_{|z_2|^2})$

ESERCIZI

Supponiamo che $z = 2-3i$ sia una radice 4^a di w. Quali sono le altre?



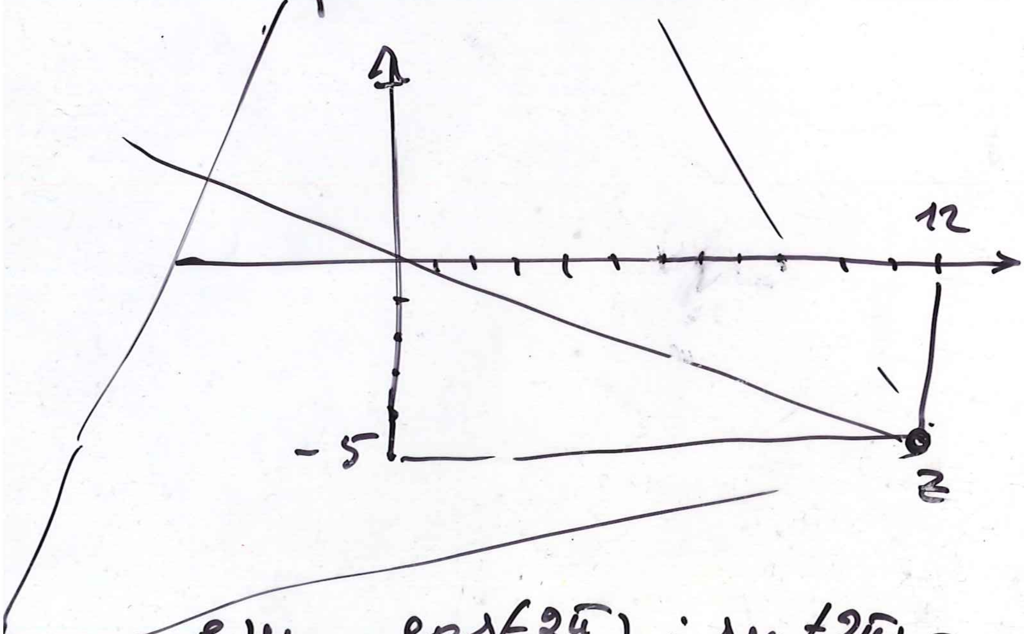
$z_1 = 3 + 2i$

(ang. di $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ scambio Im e Re e la nuova parte reale ha segno opposto a Im z)

$z_2 = -z = -2+3i$

$z_{-1} = -z_1 = -3-2i$

Se $z = 12-5i$ è una radice 3^a di w, quali sono le altre?



Le altre si ottengono per rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ e di $-\frac{2\pi}{3}$

Cioè moltiplico z per

$\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} =$

$= \quad + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

e per $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Risolvere le seguenti equazioni:

$iz^3 = \bar{z}$

$4|z| = z^3$ $\qquad |z| = -iz^3$

$|z^3| = -4z$ dire a priori quante soluzioni sono complesse NON reali

$(z-i)^4 = 1+\sqrt{3}i$

- Supponiamo che una radice 4ª di w sia $2-3i$. Determinare le altre radici quarte

- Supponiamo che una radice 3ª di w sia $12-5i$. Determinare le altre radici terze

- $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ è una radice nona di se stesso?

- Trovare modulo e argomento principale di $z=(1+i)^5$. Rappresentare poi nel piano di A.G. tutte le radici quinte di z

- Trovare le radici terze di $\dfrac{i\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{5+3i}$