VETTORI

grandezze individuate da: MODULO (o norma): reale ≥ 0
DIREZIONE
VERSO.

Rappresentazione: FRECCE USCENTI DA UN PUNTO FISSATO DELLO SPAZIO: O

.... Traslazione $\underline{v}$ da O ad A
o equivalentemente da P a Q $\quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$
o ......

identificazione di vettori EQUIPOLLENTI

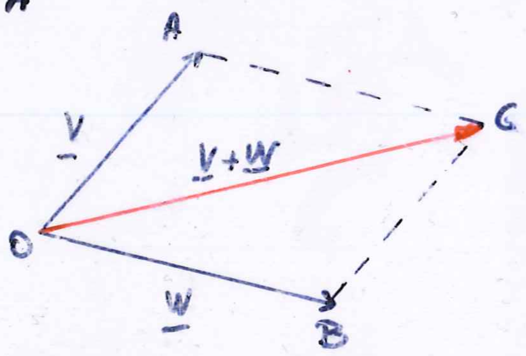
$|\underline{v}|$

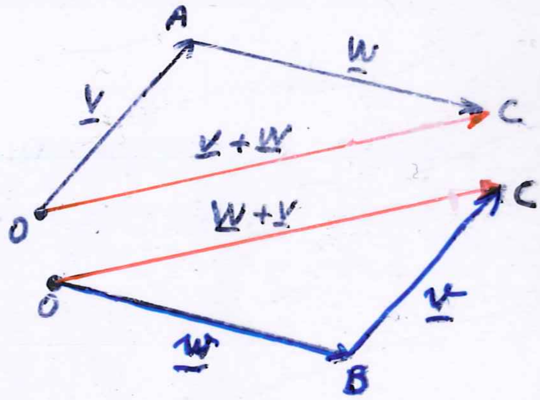
se $|\underline{v}| = 0$ dico che $\underline{v}$ è il vettore nullo $\underline{0}$

OPERAZIONI

SOMMA

$\underline{v} + \underline{w}$



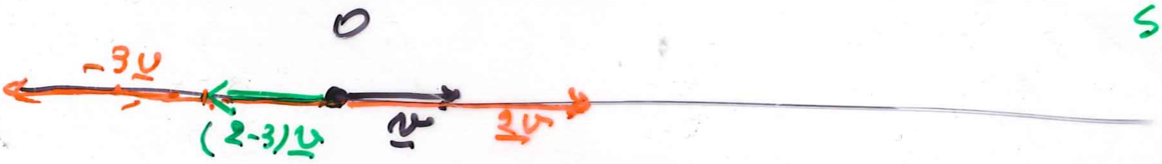


- commutativa
- associativa
- neutro: vettore nullo: $\underline{0}$
- opposto

(1) $\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{v}$:

$$(s+t)\,\underline{v} = (s\underline{v}) + (t\underline{v})$$

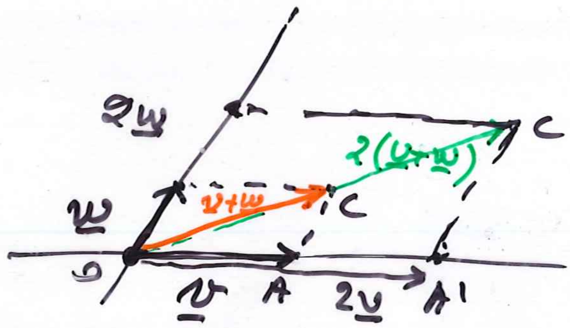
SPIEGAZIONE VISIVA delle PROPRIETÀ del PRODOTTO SCALAR-VETTORE
Vedi slide V2



$s = 2$
$t = -3$

(2) $\forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$

$$s(\underline{v} + \underline{w}) = s\underline{v} + s\underline{w}$$

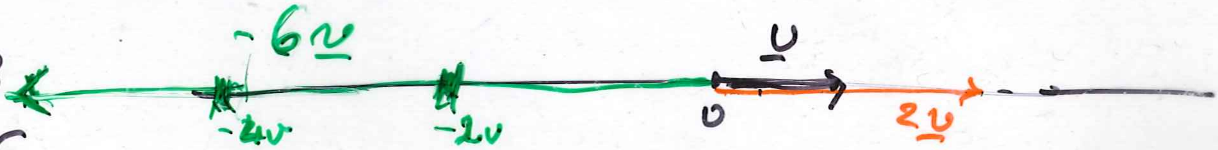


Teor di Talete

$s = 2$

(3) $\forall s, t \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{v} \;:\; (st)\underline{v} = s(t\underline{v})$

$s = 2$
$t = -3$
$st = -6$



(4) $1 \in \mathbb{R} \qquad 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

Def di Spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

V: insieme

operazione di somma di vettori

$$V \times V \xrightarrow{+} V$$

$$v_1 + v_2 \in V$$

operazione di prodotto scalare-vettore

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$tv \in V$$

con le proprietà

1) comm. della somma
2) assoc. " "
3) esistenza neutro risp. somma: $\underline{0}$
4) $\forall \underline{v}$ esiste l'opposto cioè un vettore $\underline{v}'$ t.c. $\underline{v} + \underline{v}' = \underline{0}$
5) $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \ \forall s \in \mathbb{R} \quad s(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = s\underline{v}_1 + s\underline{v}_2$
6) $\forall s, t \in \mathbb{R} \ \forall \underline{v} \in V \quad (s+t)\underline{v} = s\underline{v} + t\underline{v}$
7) $\forall s, t \in \mathbb{R} \ \forall \underline{v} \in V \quad (st)\underline{v} = s(t\underline{v})$
8) $\forall \underline{v} \in V$, $1 \in \mathbb{R}$: $1\underline{v} = \underline{v}$

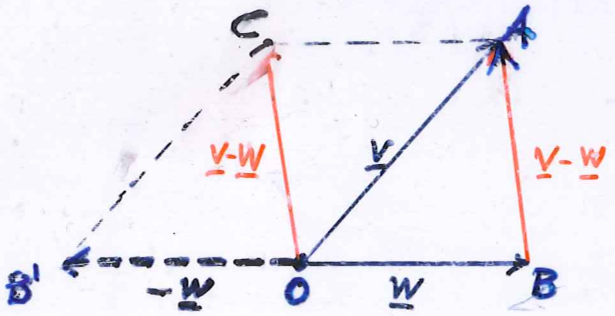
L'insieme delle funzioni definite in (a,b) a valori in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale risp. alla somma:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$ e al prod.

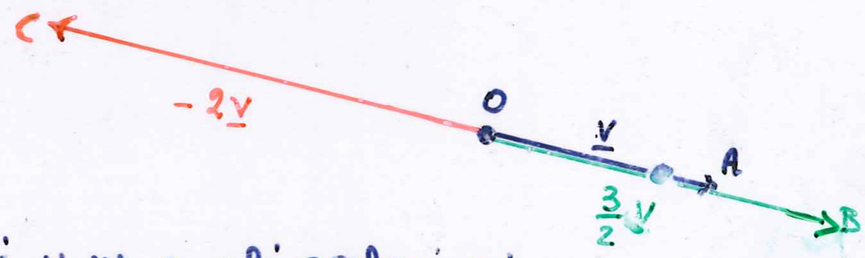
$$(tf)(x) = t\,f(x)$$ $\forall$ numero reale t

DIFFERENZA : $\underline{v} - \underline{w}$

$\overrightarrow{OC} = \cancel{\overrightarrow{AB}}$ NO $\overrightarrow{BA}$



PRODOTTO $\boxed{\text{PER}}$ SCALARE $t \in \mathbb{R}$



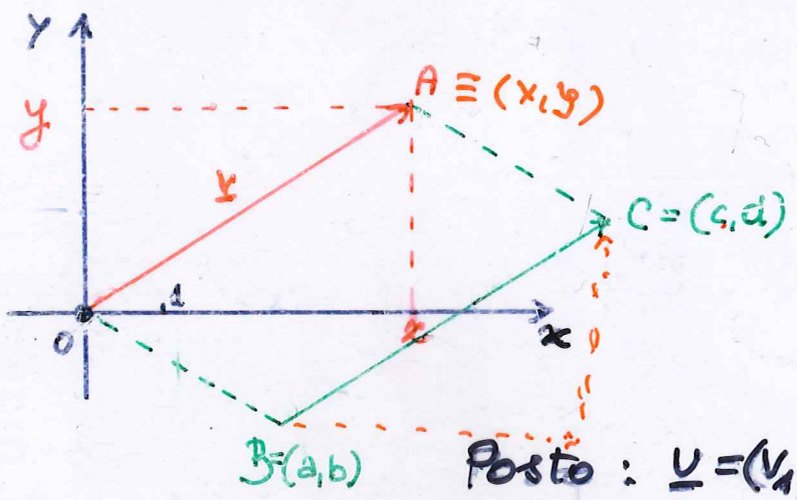
Per tutti i $\underline{v}, \underline{w}$ e gli scalari s, t:

- $(s+t)\underline{v} = s\underline{v} + t\underline{v}$
- $s(\underline{v}+\underline{w}) = s\underline{v} + s\underline{w}$
- $s(t\underline{v}) = (st)\underline{v}$
- $1(\underline{v}) = \underline{v}$

Dirò che i vettori con "SOMMA" e "PRODOTTO PER SCALARE" formano spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

VETTORI COME "n-uple" ORDINATE

Sist. di riferimento nel piano



$\underline{v} = \overrightarrow{OA} = (x,y)$

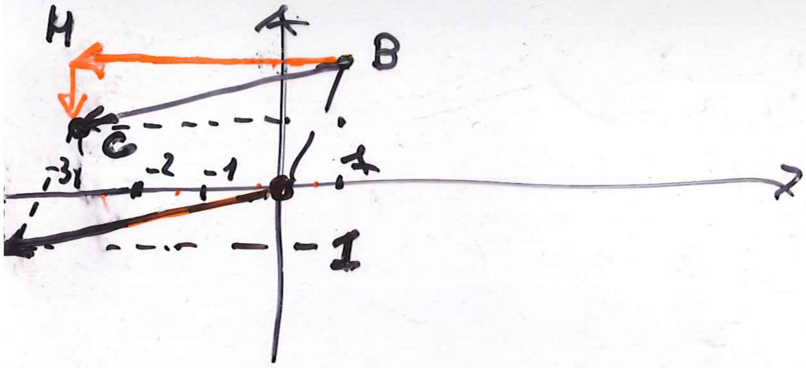
x, y componenti (scalari) di $\underline{v}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (c-a, d-b)$

equazioni param. della retta

Posto : $\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\underline{w} = (w_1, w_2)$

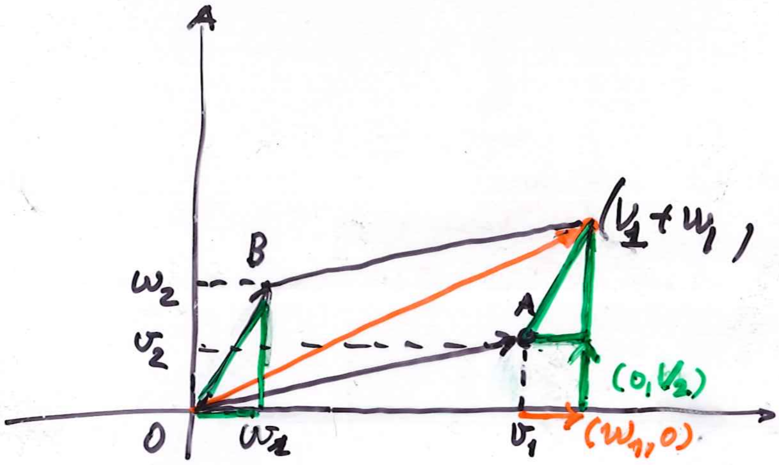
$$\Rightarrow \quad \underline{v}+\underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2)$$
$$t\underline{v} = (tv_1, tv_2)$$



$B \equiv (1,2)$

$C \equiv (-3,1)$

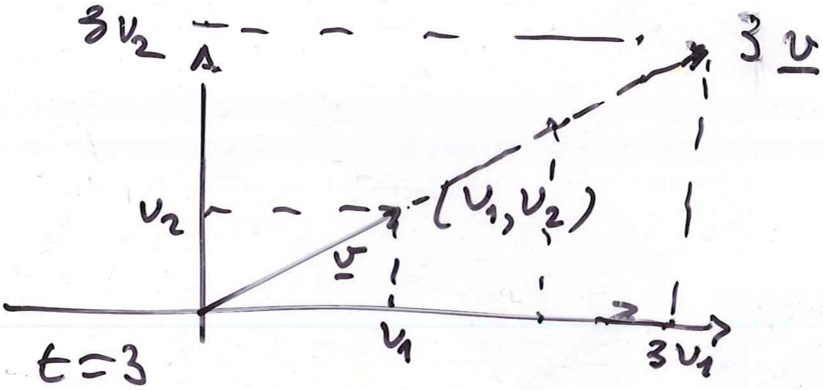
$\overrightarrow{BC} = (-3-1, 1-2)$
$= (-4, -1)$



$\underline{v} = (v_1, v_2)$

$\underline{w} = (w_1, w_2)$

$\Rightarrow \quad \underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

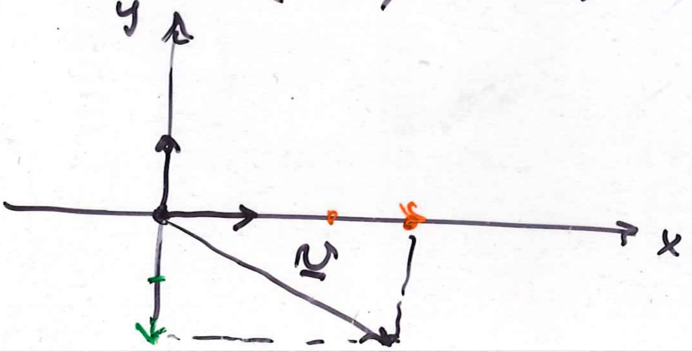


$t = 3$

$t(v_1, v_2) = (tv_1, tv_2)$

$\underline{v} = (3, -2) = (3, 0) + (0, -2) =$

$= 3(1,0) + (-2)(0,1)$ cioè moltiplicando le due componenti di $\underline{v}$ rispettivam. per $(1,0)$ e $(0,1)$ si hanno i due vettori componenti di $\underline{v}$ rispetto alla direzione e verso dell'asse x ($(3,0)$) e dell'asse y ($(0,-2)$).



$\underline{v} = (v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1)$.

situazione del tutto generale

i due vettori $(1,0)$, $(0,1)$ vengono chiamati <u>VERSORI</u> della BASE CANONICA

VERSORE: vettore di modulo 1

BASE: è un sistema di vettori di V che permette la rappresentazione di ogni vettore di V come loro <u>combinazione lineare</u> tramite scalari <u>in maniera unica</u>

Per capire la def. serve conoscere la def. di combinazione lineare:

Chiamo comb. lineare di n vettori

$\underbrace{\underline{u}, \underline{v}, \ldots, \underline{w}}_{n \text{ vettori}}$ tramite n scalari

$\underbrace{r, s, \ldots, t}_{n \text{ numeri reali}}$ (detti coefficienti della comb. lin.)

il vettore: $r\underline{u} + s\underline{v} + \ldots + t\underline{w}$

Ad es.

$\underline{u} = (0,1)$ $\underline{v} = (1,0)$ $\underline{w} = (-3,1)$

$r = 2$ $s = -1$ $t = 4$

$2(0,1) - 1(1,0) + 4(-3,1) = (0,2) + (-1,0) + (-12,4) =$
$= (-13, 6)$

$2\underline{u} - \underline{v} + 4\underline{w} = (-13, 6) = -13\,\underline{v} + 6\,\underline{u} + 0\,\underline{w}$:

(cioè) se uso i vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ per rappresentare $(-13, 6)$ non ho una sola rappresentazione possibile, poiché posso usare la terna di numeri reali

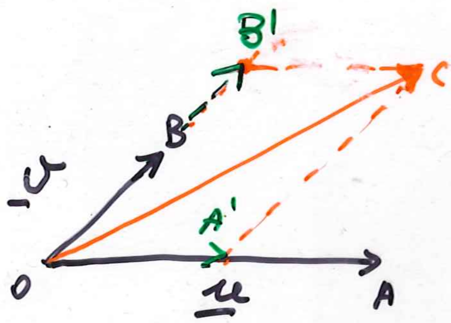
$$2, -1, 4$$

ma anche la terna

$$6, -13, 0$$

$\Rightarrow$ visto che la rappresentazione non è unica, $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ non è una base per lo spazio vettoriale V delle coppie (o se si preferisce: dei vettori che giacciono nel piano)
Anche se $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ sono un sistema di generatori per tutti i vettori di V.

Invece $\{\underline{i} = (1,0), \underline{j} = (0,1)\}$ lo è e lo è anche una qualunque coppia di vettori con direzione diversa. Ad es.: $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$



poiché ogni altro vettore $\overrightarrow{OC}$ può essere scomposto lungo le direz di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ in modo unico

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$$

e $\overrightarrow{OB'}$ è multiplo secondo 1 solo scalare di $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{OB'} = b\underline{v}$

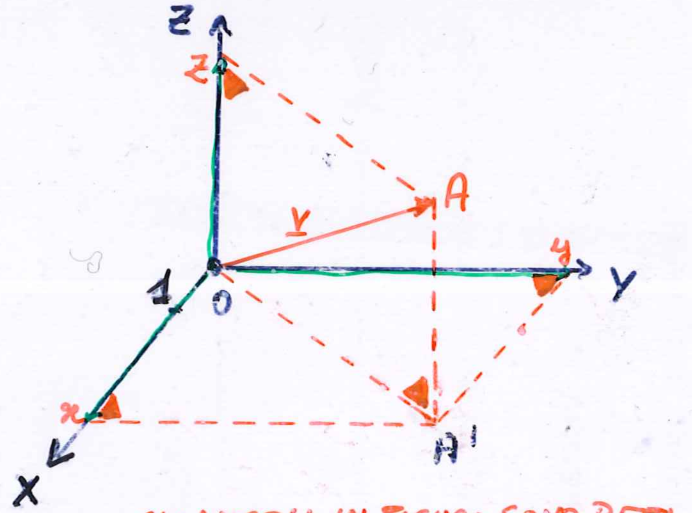
e $\overrightarrow{OA'}$ è multiplo secondo 1 solo scalare di OA: $\overrightarrow{OA'} = a\underline{u}$

V3

Modulo di $\underline{v} = (x, y)$: $\sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$
Distanza di B da C : $|\vec{BC}| = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

Versori della base canonica : $\underline{i} = (1,0)$ $\underline{j} = (0,1)$

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio con orientazione DESTRORSA



GLI ANGOLI IN FIGURA SONO RETTI

$\underline{v} = \vec{OA} = (x, y, z)$

... componenti di $\underline{v}$

$|\underline{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow$ distanza tra 2 punti $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$

$|\vec{BC}| = |(c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3)|$
$= \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+(c_3-b_3)^2}$

Se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v} + \underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)$

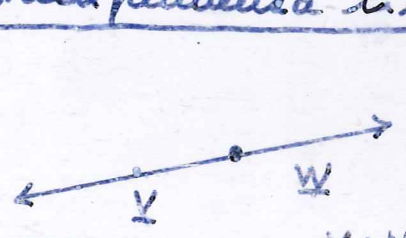
$t\underline{v} = (tv_1, tv_2, tv_3)$

Versori della base canonica $\underline{i} = (1,0,0)$, $\underline{j} = (0,1,0)$, $\underline{k} = (0,0,1)$

$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$

Combinazione lineare

Indipendenza lineare



$\underline{v}, \underline{w}$ dipendenti

$\underline{u} = a\underline{v} + b\underline{w}$