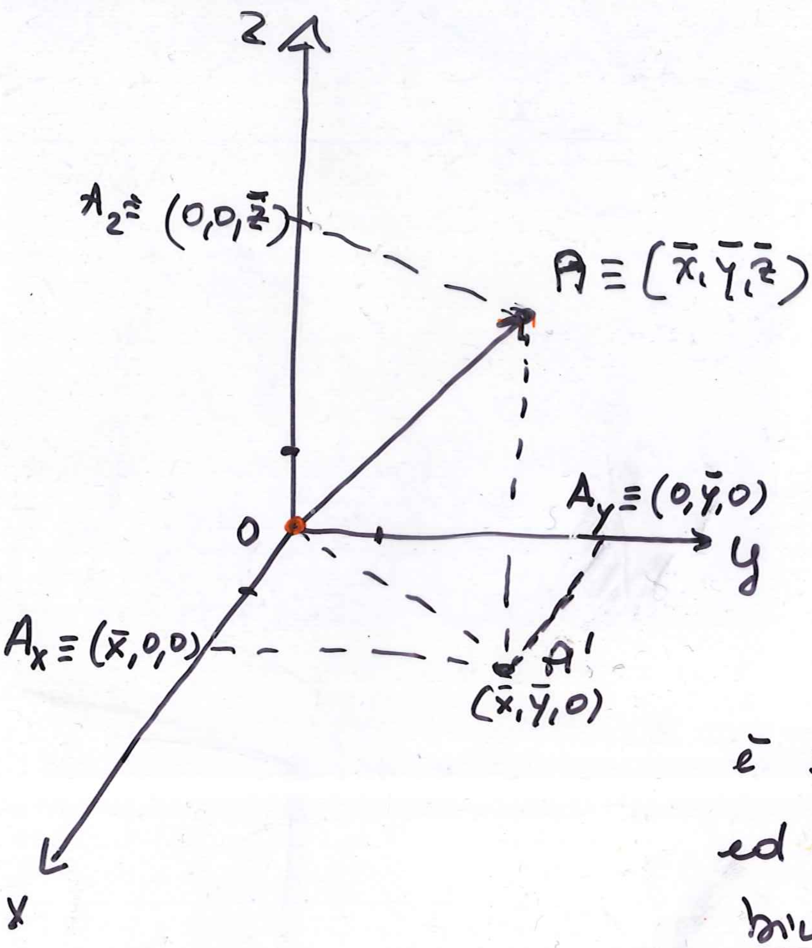


Oxyz riferimento cartesiano ortogonale ($x \perp y$, $x \perp z$, $y \perp z$) monometrico (uguale unità di misura sui 3 assi)

$A \longmapsto (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ terna ordinata di numeri reali

è <u>funzione</u>: Spazio 3D $\to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

ed è anche <u>biunivoca</u> poiché fissata la terna $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ di coordinate basta prendere

1°) piano // Oyz e passante per il punto A_x di ascissa $\bar{x}$ sull'asse x

2°) piano // Oxz e passante per A_y di coordinate $\bar{y}$ sull'asse y

3°) piano // Oxy e passante per A_z di coord. $\bar{z}$ sull'asse z

Questi 3 piani si intersecano in 1 e 1 sol punto dello spazio: A.

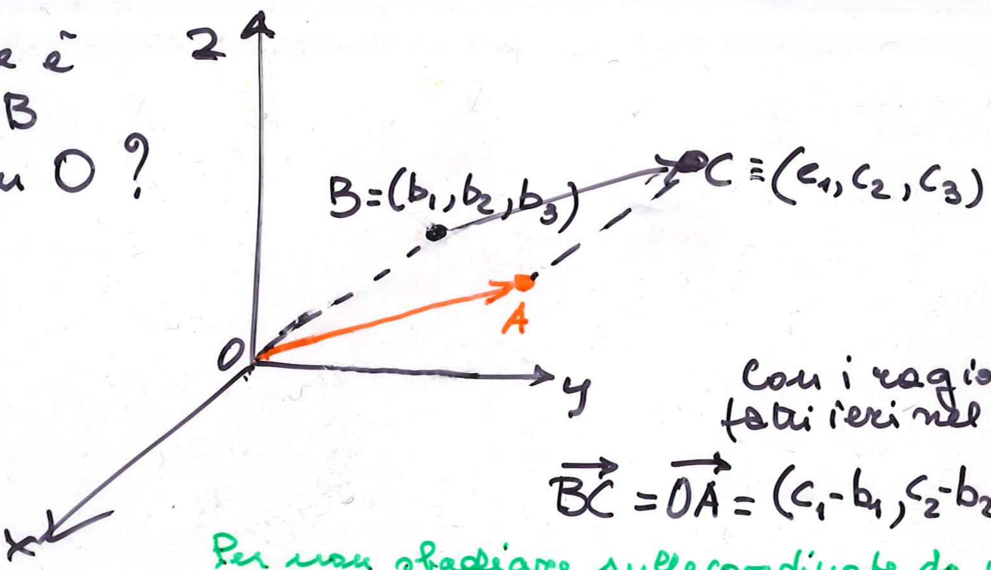
$\Rightarrow$ Identifico i punti dello spazio 3D con le terne $\in \mathbb{R}^3$

Associo a ogni vett. $\vec{OA}$ applicato in $O \equiv (0,0,0)$ la terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ che rappresenta A nel sist. di rif. cart. ort. mon. $Oxyz$. (corrispondenza biunivoca) e scrivo:

$$\vec{OA} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

e chiamo $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le componenti (scalari) del vettore $\vec{OA}$

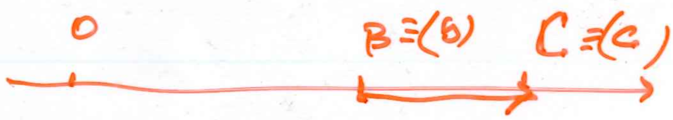
E se il vettore è applicato in B invece che in O? Cerco $\vec{OA}$ equipollente a $\vec{BC}$



Con i ragionamenti fatti ieri nel piano:

$$\vec{BC} = \vec{OA} = (c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3)$$

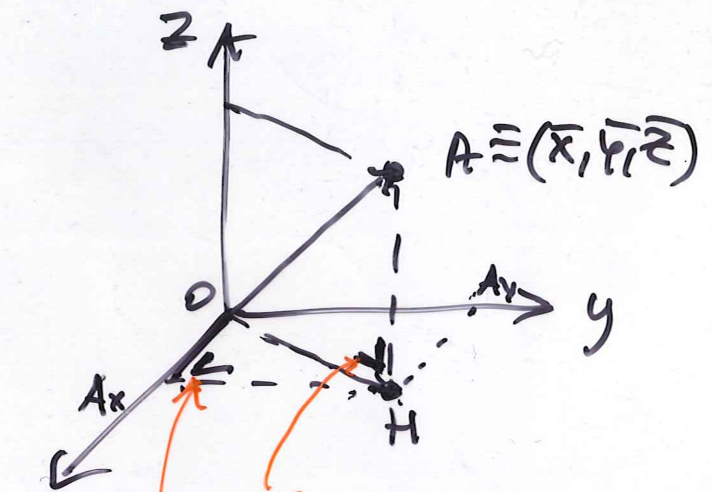
Per non sbagliare sulle coordinate da usare come "SOTTRAENDI" ricordare il caso LINEARE:



per andare da B a C devo aggiungere $c-b$ (se sono sulla retta orientata). Il discorso si estende in tutte le dimensioni.

$|\vec{OA}|$ = la distanza di A da O?

Come si calcola?



Considero i 2 piani xOy e il piano contenente z e A (suppongo $A \notin Z$ altrimenti $|\overrightarrow{OA}| = |\bar{z}|$)

angolo retto $\Rightarrow$ Pitagora: $|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OH}|^2 + |\overrightarrow{HA}|^2$$

$$= (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \bar{z}^2$$

$\Rightarrow$ $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$. Se $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow$ modulo di $\overrightarrow{BC}$:

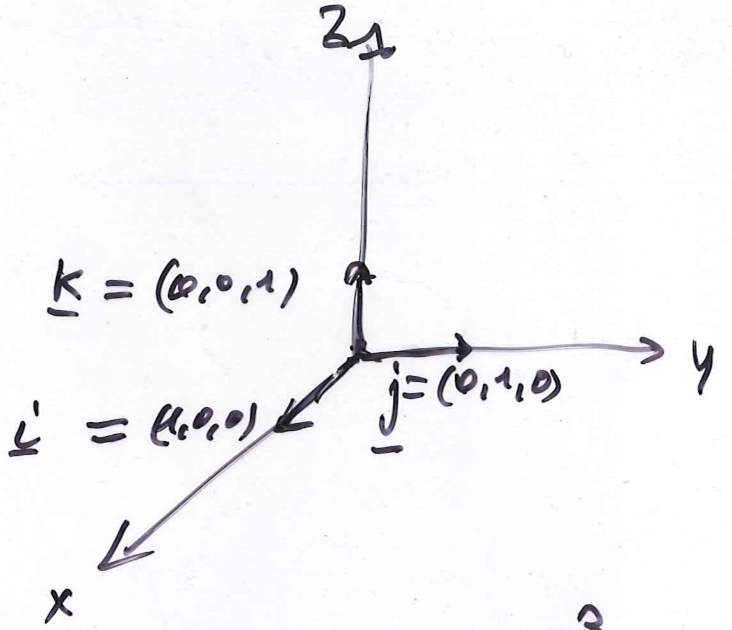
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + (c_3 - b_3)^2}$$

questa è la formula della <u>distanza tra 2 punti nello spazio</u>

$\forall$: $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (V_1, V_2, V_3)$ $\in \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + V_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$\forall$ $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $t\underline{u} = (tu_1, tu_2, tu_3)$

Per ogni $\underline{u}$ vale che $\underline{u} = u_1(1,0,0) + u_2(0,1,0) + u_3(0,0,1)$



$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ hanno modulo 1
↓
li chiamo VERSORI della base canonica.

ogni vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ si scrive come

$$\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k}$$

(e la scrittura è unica)

$\underline{u}$ è combinazione lineare di $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ mediante i coeff. u_1, u_2, u_3.

Prendo un certo numero n di vettori di $\mathbb{R}^3$ $\underbrace{\underline{u}, \underline{v}, \dots, \underline{w}}_{n \text{ vettori}}$. ESSI (per definizione) costituiscono un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$ se ogni vettore $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere come loro comb. lineare mediante certi coefficienti: $a, b, \dots, c$:

$$r = a\underline{u} + b\underline{v} + \dots + c\underline{w}$$

(non si danno garanzie sull'unicità dei coefficienti $a, b, \dots, c$)

Ad esempio:

$\{ \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{u} = (1,-1,3) \} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\underline{v} = (2,-2,6)$

$\underline{v} = 2\underline{i} - 2\underline{j} + 6\underline{k} + 0\underline{u}$
$= 0\underline{i} + 0\underline{j} + 0\underline{k} + 2\underline{u}$

rappresentaz. non unica.

DEFINIZIONE

$\{ \underbrace{\underline{u}, \underline{v}, \dots, \underline{w}}_{n \text{ vettori}} \}$ di $\mathbb{R}^3$ sono detti <u>indipendenti</u>

se nessuno di essi si può rappresentare come comb. lineare degli altri.

ES.

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{0}$

$\underline{i}$ non è comb. lin. di $\underline{j}$ e $\underline{0}$
$\underline{j}$ " " " di $\underline{i}, \underline{0}$

ma $\underline{0} = 0\underline{i} + 0\underline{j}$

$\Rightarrow \{ \underline{i}, \underline{j}, \underline{0} \}$ sistema dipendente.

DEF. EQUIVALENTE di DIPENDENZA:

n vettori $\{ \underline{u}, \underline{v}, \dots, \underline{w} \}$ sono <u>linearmente dipendenti</u> se si ha che esistono n coefficienti $a, b, \dots, c$ non tutti $= 0$ tali che

$$a\underline{u} + b\underline{v} + \dots + c\underline{w} = \underline{0}.$$

DEF.

Dico che $\{ \underline{u}, \underline{v}, \dots \underline{w} \}$ sono una <u>base</u> per $\mathbb{R}^3$ se sono un sistema di generatori indipendenti di $\mathbb{R}^3$

se passo agli spazi $\mathbb{R}^n$ il numero di vettori della base è fissato ed è pari a n che viene chiamato <u>dimensione</u> dello sp. vettoriale $\mathbb{R}^n$.

Esempi:

$\underline{u} = (1,0,1)$, $\underline{v} = (-1,1,0)$, $\underline{w} = (0,1,1)$

Sono indipendenti?

cerca $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.c.

(*) $x\,\underline{u} + y\,\underline{v} + z\,\underline{w} = \underline{0}$.

se l'unica soluz. è $(x,y,z) = (0,0,0)$ allora sono indip. — Se ne esiste almeno un'altra sono dipendenti.

Risolvo (*)

$$x(1,0,1) + y(-1,1,0) + z(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$(x,0,x) + (-y,y,0) + (0,z,z) = (0,0,0)$$

$$(x-y,\ y+z,\ x+z) = (0,0,0)$$

ciò accade se e solo se le componenti dello stesso posto sono uguali:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

sistema lineare OMOGENEO.
CERTAMENTE $(x,y,z) = (0,0,0)$ è una soluzione, ma non è la sola.
Infatti risolvendo trovo:

$$\begin{cases} x=y \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$ ove ho sostituito nell' ultima eq. y al posto di x

Le ultime 2 equazioni sono uguali: quindi il sistema equivale a $\begin{cases} x=y \\ y+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-y \end{cases}$

Comunque scelga $k \in \mathbb{R}$, se pongo $y=k$ trovo $x=k$ e $z=-k$ $\Longrightarrow$ $(x,y,z)=(k,k,-k)$ al variare di k in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ forniscono infinite soluzioni non nulle del sistema (e del mio problema).

Quindi i 3 vettori $\underline{u}=(1,0,1)$, $\underline{v}=(-1,1,0)$ $\underline{w}=(0,1,1)$ sono dipendenti e $\forall k \in \mathbb{R}$

$$k\underline{u} + k\underline{v} - k\underline{w} = (0,0,0)$$

cioè ad es. in particolare se fisso $k=1$:

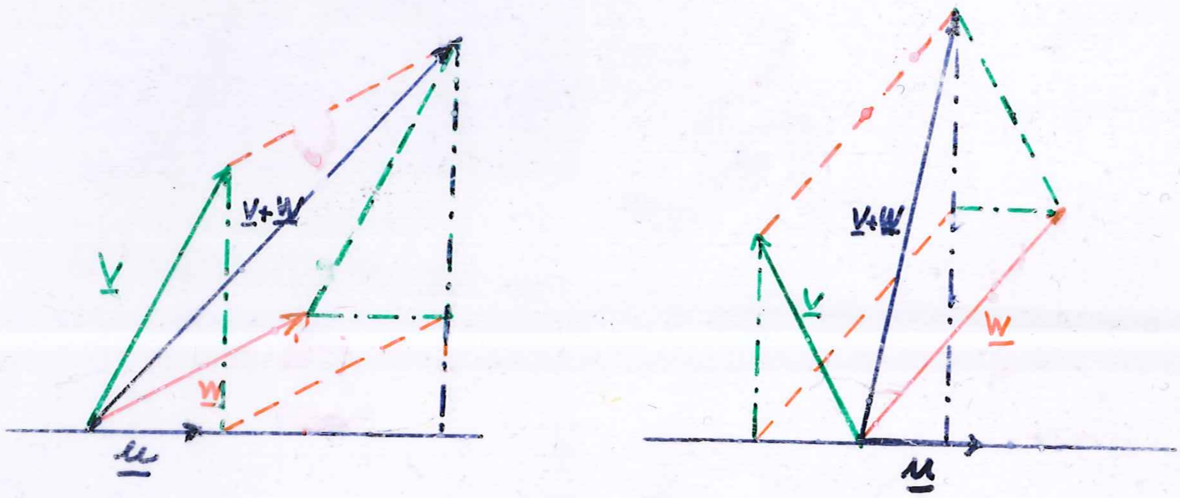
$$\underline{w} = \underline{u} + \underline{w}$$

$\bullet : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

Prodotto scalare di due vettori $\underline{v}, \underline{w}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos\alpha \qquad$ ove $\alpha = \widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$, $\alpha \in [0, \pi]$.

- commutativo
- distributivo : $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w} \qquad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$



TESI

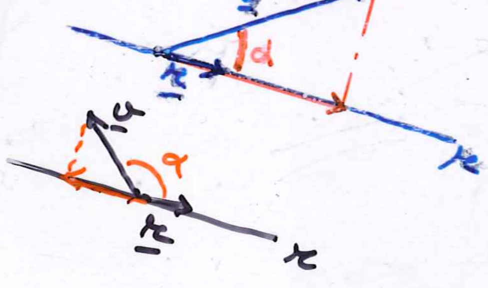
$\cancel{|\underline{u}|}\, |\underline{v}+\underline{w}| \cos(\widehat{\underline{u}\,(\underline{v}+\underline{w})}) = \cancel{|\underline{u}|} \cdot |\underline{v}| \cos(\widehat{\underline{u}\,\underline{v}}) + \cancel{|\underline{u}|} \cdot |\underline{w}| \cos(\widehat{\underline{u}\,\underline{w}})$

- $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \underline{v}, \underline{w} \quad : \quad (t\underline{v}) \cdot \underline{w} = t\,(\underline{v} \cdot \underline{w})$

- $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}| \cdot |\underline{v}| \cos 0 = |\underline{v}|^2$
- $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ e $\underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{w}$

Proiezione ORTOGONALE di un vettore $\underline{v}$ lungo la direzione di una retta r (componente vettoriale di $\underline{v}$ lungo r):

$$\left[\underline{v} \cdot \left(\underline{r} / |\underline{r}| \right) \right] \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$



$\underline{u} = (1, -1, 1) \qquad \underline{v} = (1, 2, 3)$

Il discorso portato avanti qui su un esempio è del tutto generale: vedi pag V5

$\underline{u} \circ \underline{v}$?

$\underline{u} = 1\underline{i} - 1\underline{j} + 1\underline{k} = \underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$

$\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$

$\underline{u} \circ \underline{v} = (\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}) \circ (\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}) =$ propr. distr.

$= \underline{i} \circ \underline{i} - \underline{j} \circ \underline{i} + \underline{k} \circ \underline{i} +$
$+ \underline{i} \circ 2\underline{j} - \underline{j} \circ 2\underline{j} + \underline{k} \circ 2\underline{j} +$
$+ \underline{i} \circ 3\underline{k} - \underline{j} \circ 3\underline{k} + \underline{k} \circ 3\underline{k} =$

$t(\underline{u} \circ \underline{v}) = (t\underline{u}) \circ \underline{v}$

$= \underline{i} \circ \underline{i} - \underline{j} \circ \underline{i} + \underline{k} \circ \underline{i} +$
$+ 2\, \underline{i} \circ \underline{j} - 2\, \underline{j} \circ \underline{j} + 2\, \underline{k} \circ \underline{j} +$
$+ 3\, \underline{i} \circ \underline{k} - 3\, \underline{j} \circ \underline{k} + 3\, \underline{k} \circ \underline{k} =$

$|\underline{i}| = |\underline{j}| = |\underline{k}| = 1 \qquad \underline{i} \perp \underline{j} \quad \underline{i} \perp \underline{k} \quad \underline{j} \perp \underline{k}$

$\Rightarrow$ tutti i prodotti circoletti sono $0 \in \mathbb{R}$

$\underline{i} \circ \underline{i} = 1 = \underline{j} \circ \underline{j} = \underline{k} \circ \underline{k}$

$\underline{u} \circ \underline{v} = 1 - 2 + 3 = 2 \Rightarrow$

$2 = \underline{u} \circ \underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos\alpha$

$= \sqrt{1+1+1}\,\sqrt{1+4+9} \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3 \cdot 14}} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{42}} \in [0, \pi]$

In termini di componenti:

$j \uparrow \; \rightarrow i$

se $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j}) \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) = v_1 \underline{i} \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) + v_2 \underline{j} \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) =$
$= (v_1 \underline{i}) \cdot (w_1 \underline{i}) + (v_1 \underline{i}) \cdot (w_2 \underline{j}) + (v_2 \underline{j}) \cdot (w_1 \underline{i}) + (v_2 \underline{j}) \cdot (w_2 \underline{j}) =$
$= v_1 w_1 (\underline{i} \cdot \underline{i}) + v_1 w_2 (\underline{i} \cdot \underline{j}) + v_2 w_1 (\underline{j} \cdot \underline{i}) + v_2 w_2 (\underline{j} \cdot \underline{j}) =$
$= v_1 w_1 + v_2 w_2$

$\underline{i} \cdot \underline{j} = 0 = \underline{j} \cdot \underline{i}$
$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1 = \underline{j} \cdot \underline{j}$

$$\boxed{\text{se } \underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \;,\; \underline{w} = (w_1, w_2, w_3) \;:\; \underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$$

ES 1 Trovare l'angolo tra i due vettori $\underline{v} = (1,2,3)$ e $\underline{w} = (3,-1,2)$:

$1 \cdot 3 + 2(-1) + 3 \cdot 2 = \underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos\alpha = \sqrt{1+4+9}\,\sqrt{9+1+4}\,\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha =$

In generale:

ES 2 Trovare un vettore ortogonale a $\underline{v} = (-1, 2, 1)$ e a $\underline{w} = (3, 1, 4)$ di modulo 1.

$\underline{u} = (x, y, z)$

$\underline{u} \perp \underline{v} \iff$

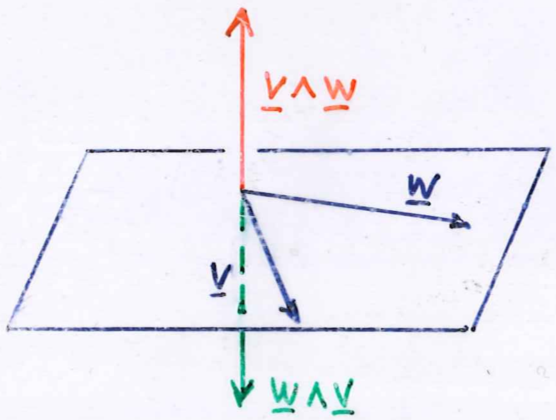
$\underline{u} \perp \underline{w} \iff$

$|\underline{u}| = \ldots$

ES 3 I vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ dell'esercizio precedente sono indipendenti?

Prodotto vettoriale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ nello spazio di dim. 3

- $|\underline{v} \wedge \underline{w}| = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \sin\alpha$
- $\underline{v} \wedge \underline{w}$ ortogonale tanto a $\underline{v}$ che a $\underline{w}$
- $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}$ è una terna DESTRORSA



- anticommutativo
  $\underline{w} \wedge \underline{v} = -\underline{v} \wedge \underline{w}$
- $(t\underline{v}) \wedge \underline{w} = t(\underline{v} \wedge \underline{w})$
- $\underline{v} \wedge \underline{v} = \underline{0}$
- distributivo
  $\underline{u} \wedge (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \wedge \underline{v} + \underline{u} \wedge \underline{w}$

Geometricamente $|\underline{v} \wedge \underline{w}| =$

$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$ .....

$\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$ $\quad \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$ $\quad \underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j}$

Dunque se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) \wedge (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}) = \text{DISTR.}$$

$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\underline{k}$$

$\boxed{\text{Es.2 pag 5}}$ $\quad \underline{u} = \dfrac{\underline{v} \wedge \underline{w}}{|\underline{v} \wedge \underline{w}|}$ oppure il suo opposto