Verifica su un esempio delle formule per il calcolo del prod. vett.

$\underline{v} = (1, 2, 3)$ $\qquad\qquad$ $\underline{w} = (5, 6, 7)$

$= 1\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$ $\qquad\qquad$ $= 5\underline{i} + 6\underline{j} + 7\underline{k}$

$\underline{v} \wedge \underline{w} = (\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}) \wedge (5\underline{i} + 6\underline{j} + 7\underline{k}) =$ distr.

$= \underline{i} \wedge (5\underline{i}) + \underline{i} \wedge (6\underline{j}) + \underline{i} \wedge (7\underline{k}) +$

$+ (2\underline{j}) \wedge (5\underline{i}) + (2\underline{j}) \wedge (6\underline{j}) + (2\underline{j}) \wedge (7\underline{k}) +$

$+ (3\underline{k}) \wedge (5\underline{i}) + (3\underline{k}) \wedge (6\underline{j}) + (3\underline{k}) \wedge (7\underline{k}) =$

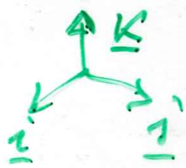
Omogeneità

$= 5\,\underline{(\underline{i} \wedge \underline{i})} + 6\,(\underline{i} \wedge \underline{j}) + 7\,(\underline{i} \wedge \underline{k}) +$

$+ 10\,(\underline{j} \wedge \underline{i}) + 12\,\underline{(\underline{j} \wedge \underline{j})} + 14\,(\underline{j} \wedge \underline{k}) +$

$+ 15\,(\underline{k} \wedge \underline{i}) + 18\,(\underline{k} \wedge \underline{j}) + 21\,\underline{(\underline{k} \wedge \underline{k})} =$

$\underline{i} \wedge \underline{i} = \underline{j} \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{k} = \underline{0}$



$\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{i} \wedge \underline{j} = -\underline{k}$

$\underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{k} \wedge \underline{i} = -\underline{j}$

$\underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{j} \wedge \underline{k} = -\underline{i}$

$= (6 - 10)\,\underline{k} + (15 - 7)\,\underline{j} + (14 - 18)\,\underline{i} =$

$= -4\underline{i} + 8\underline{j} - 4\underline{k} = (-4, 8, -4)$

Ho trovato davvero $\underline{v} \wedge \underline{w}$?

Controllo almeno che sia $\perp \underline{v}$ e $\perp \underline{w}$

cioè che $\underline{v} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = 0$ e che $\underline{w} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = 0$

$(1,2,3) \cdot (-4,8,-4) = -4 + 16 + 3(-4) = 0$

$(5,6,7) \cdot (-4,8,-4) = -20 + 48 - 28 = 0$

la dir è OK

SIMBOLISMO PER IL CALCOLO VELOCE di $\underline{v} \wedge \underline{w}$. So che:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)\,\underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\,\underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\,\underline{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

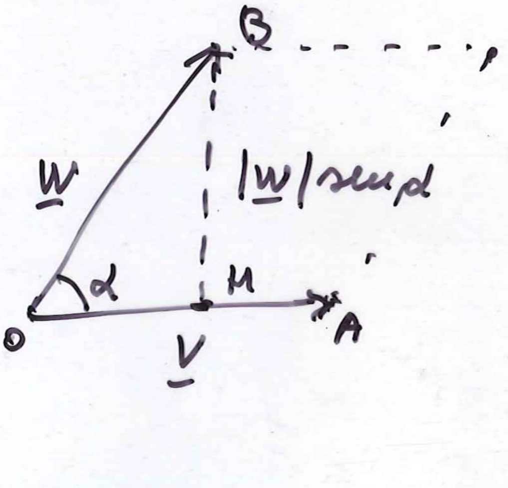
determinante simbolico

analogamente per la componente di $\underline{k}$

invece per la componente di $\underline{j}$

$$\begin{array}{c|c|c} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \hline v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$

$|\underline{v} \wedge \underline{w}|$ geometricamente chi è?



$|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|\,\mathrm{sen}\,\alpha =$

$= \overline{OA} \cdot \overline{BH}$

area del parallelogramma che ha tre vertici in A, O, B

Prodotto misto $\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})$, $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$

V7

$|\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})|$ geometricamente esprime:

quindi si annulla se e solo se:

Se $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} : \text{DETERMINANTE DELLA MATRICE } \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix}$$

Inserire le 3 slides successive

GEOMETRIA CON I VETTORI:

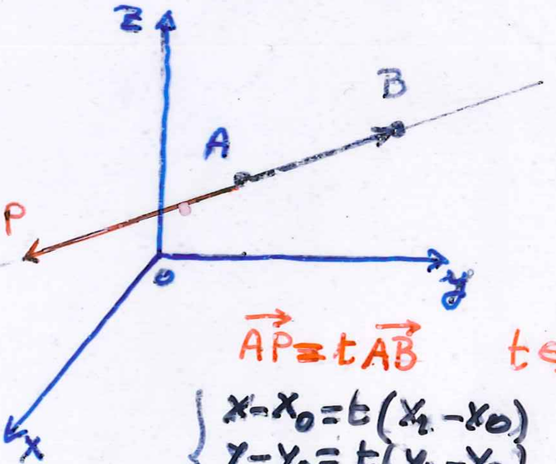
Equazioni parametriche della retta

una retta è nota:

- dati due suoi punti distinti $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$

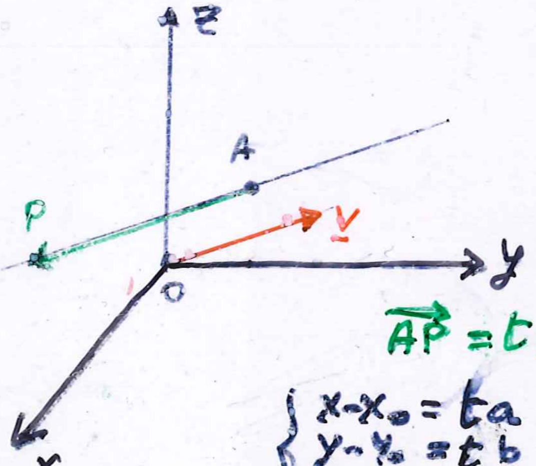
oppure

- dato un suo punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e una direzione $\underline{v} = (a, b, c)$ cui la retta è parallela



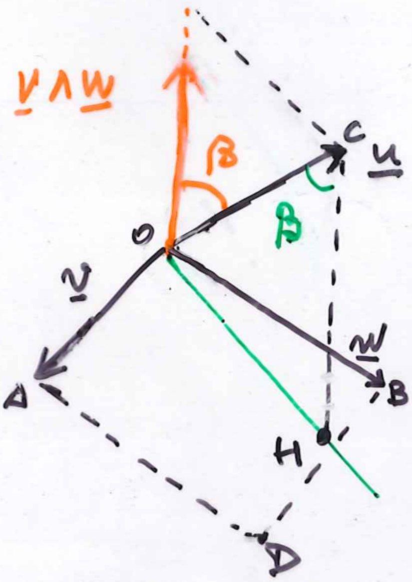
$\vec{AP} = t\vec{AB}$ $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \\ z - z_0 = t(z_1 - z_0) \end{cases}$$



$\vec{AP} = t\underline{v}$ $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$$

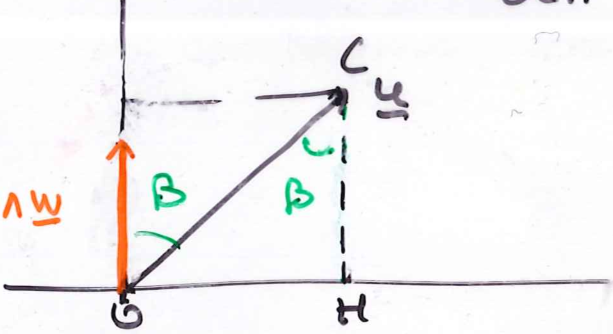


$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) =$

$= |\underline{u}| \cdot |\underline{v} \wedge \underline{w}| \cos\beta$

ove β è l'angolo tra $\underline{u}$ e $\underline{v} \wedge \underline{w}$

rappresentazione di quanto succede nel piano OCH

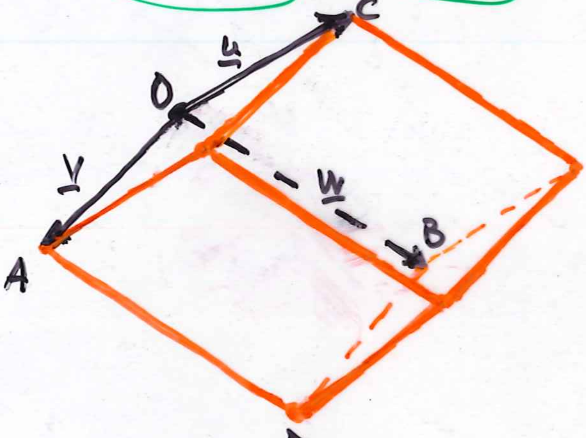


$|\underline{v} \wedge \underline{w}| =$ area del parallelogram. con lati OA, OB ecc..

$|\underline{u}| \cos\beta = CH$

$\Rightarrow$ il prodotto misto rappresenta (a meno del segno) il volume del parallelepipedo di vertici O, A, B, C ecc.

infatti $\underline{u} \circ (\underline{v} \wedge \underline{w})$ può essere < 0. Succede se $\beta \in (\pi/2, \pi]$



Quando si annulla?

quando un lato è $= 0$ $\Rightarrow$ uno dei 3 vettori è $\underline{0}$

oppure quando $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono proporzionali (hanno ugual direzione)

oppure $\underline{u} \in$ al piano OAB poiché in tal caso $\beta = \frac{\pi}{2}$

Abbiamo trovato un modo meccanico per vedere se $\boxed{3}$ vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ $\boxed{\text{di } \mathbb{R}^3}$ sono dipendenti o no!

Sono dipendenti se e solo se

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = 0$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_2 w_3 - v_3 v_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1) =$$

$$= u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_3) =$$

con la stessa simbologia vista per il prod. vettoriale:

$$= \begin{vmatrix} \boxed{u_1} & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$\underline{u} = (1, 2, 3)$ $\underline{v} = (4, 5, 6)$ $\underline{w} = (7, 8, 9)$

Sono indipendenti?

Sì se il loro prodotto misto è diverso da zero

No se il loro prod. misto è nullo

Conti!

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

ho scambiato la 1ª e la 3ª colonna

$$= 1(45-48) + 2(42-36) + 3(32-35) =$$

$$= -3 + 2(6) + 3\cdot(-3) = 0$$

$\Longrightarrow$ i 3 vettori sono dipendenti cioè esiste una loro comb. lineare a coeff. non tutti $= 0$ che dà il vettore $\underline{0}$

Trovare (x, y, z) t.c.

$$x(1,2,3) + y(4,5,6) + z(7,8,9) = (0,0,0)$$

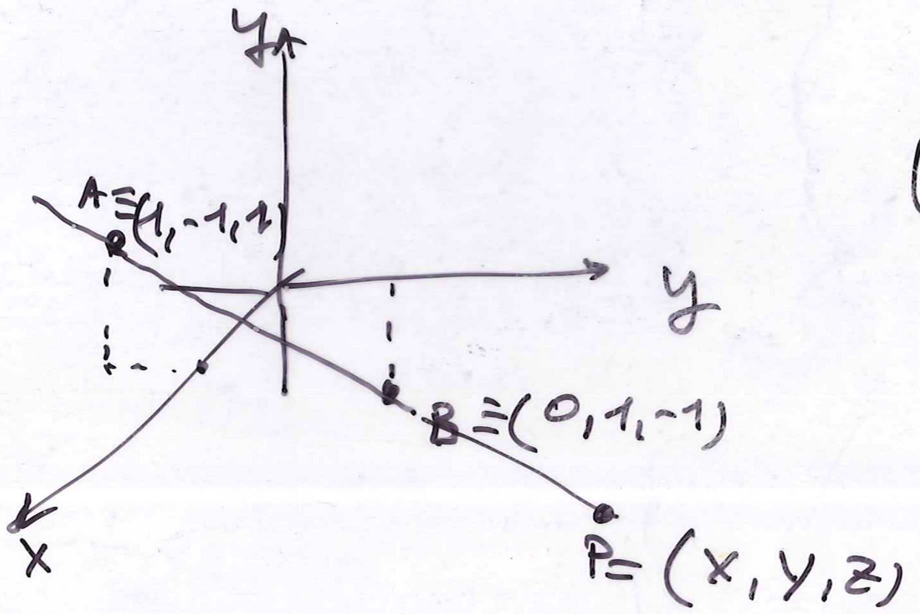
con $(x, y, z) \neq (0,0,0)$.

R: $\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w} = (0,0,0)$ e quindi $(x, y, z) = (1,-2,1)$ o un qualunque multiplo non nullo di $(1,-2,1)$

spiegazione pratica della slide V7, Geom. analitica

Retta passante per $A = (1, -1, 1)$

e $B = (0, 1, -1)$



$$\vec{AP} = t\,\vec{AB}$$

$(x-1, y+1, z-1) =$

$t(0-1, 1+1, -1-1)$

ciò succede se e solo se sono uguali le 3 componenti

$$\begin{cases} x-1 = t(-1) \\ y+1 = t(2) \\ z-1 = t(-2) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$P = A + t\,\vec{AB}$$

in questo modo evidenzio le coordinate del punto P corrente sulla retta al variare di t.

Queste a sistema sono le eq. → cartesiane della retta in forma parametrica se non voglio descrivere punto per punto i punti della retta ma descrivere i legami che devono avere le loro coordinate, ricavo t (parametro) da una delle 3 eq. del sistema precedente e sostituisco nelle altre.

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Ricavo t

$$\begin{cases} t = 1 - x \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Sostituisco

$$\begin{cases} t = 1 - x \\ y = -1 + 2 - 2x \\ z = 1 - 2 + 2x \end{cases}$$

Le relazioni tra le coord. x, y, z di ciascuno dei punti della retta sono

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

(questo sistema ha per soluz. esattamente i punti della retta:

$\{ (1-t, -1+2t, 1-2t), t \in \mathbb{R} \}$)

Attenzione: la stessa retta può essere rappresentata diversamente. Ad es.

$$\begin{cases} 2x+y+3(2x-z) = 1+3(1) \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} 8x+y-3z=4 \\ 2x-z=1 \end{cases}$

Potrei anche dare una rapp. parametrica diversa da

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+2t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Vettore che dà la direzione di qs. retta? cerco il vettore dei coeff. di t:

$$\underline{v} = (-1, 2, -2)$$

E se prendo $\underline{v}' = (1, -2, 2) = -\underline{v}$? ho la stessa retta con differente rapp. param:

$$\begin{cases} x = 1+s \\ y = -1-2s \\ z = 1+2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

$(s=-t)$

oppure osservo che $C=(3,-5,5)$ ottenuto per $s=2$ appartiene alla retta. Anche la retta passante per C e con vettore direzione $\underline{v}'$ coincide con la precedente

$$\begin{cases} x = 3+s \\ y = -5-2s \\ z = 5+2s \end{cases}$$

Per vedere se due rette in forma parametrica coincidono devo impostare un sist. relativo alle coord. di $P\equiv(x,y,z)$ e questo deve essere soddisfatto per "infiniti" valori dei ~~2~~ due parametri (1 solo legame!)
Ad es.

$$\begin{cases} 3+s = 1-t \\ -5-2s = -1+2t \\ 5+2s = 1-2t \end{cases} \qquad \begin{cases} s+t=-2 \\ 2s+2t=-4 \\ 2s+2t=-4 \end{cases}$$

equivale a 1 sola equazione

$$s+t=-2$$

e quindi ci sono infinite soluzioni
$(s,t) = (k, -2-k)$, $k \in \mathbb{R}$

V8

Es1 Trovare le eq. parametriche della retta passante per $A=(1,-1,1)$ e $B=(0,1,-1)$.

Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

ERRORE SUL TESTO: EQUAZIONE CARTESIANA della retta

Appena svolto

Es2 Trovare le eq. parametriche della retta passante per $A=(2,1,3)$ e "parallela" al vettore $\underline{v}=(1,-3,0)$

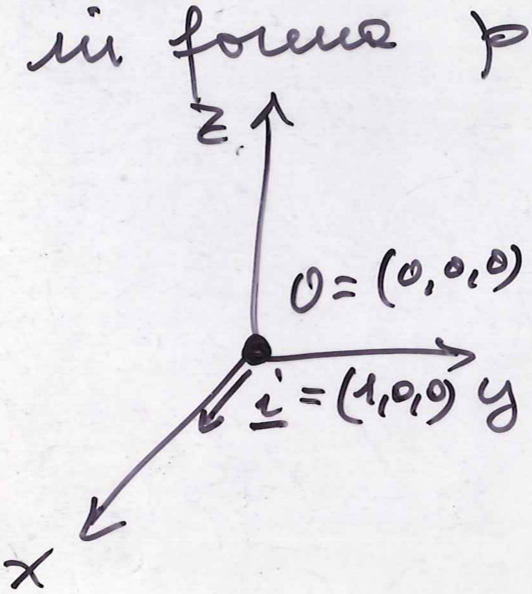
Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

Es3 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A=(3,1,2)$ e ortogonale alle due rette di equazioni $\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases}$ e

$$\frac{x-1}{2} = 3y-1 = \frac{4z+1}{3}$$

Es4 Il sistema $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 4x+y-z=2 \end{cases}$ rappresenta una retta nello spazio di dimensione 3? Se sì trovarne i COSENI DIRETTORI

Come si rappresenta l'asse x in forma parametrica?



$$\begin{cases} x = 0 + 1\cdot t \\ y = 0 + 0\cdot t \\ z = 0 + 0\cdot t \end{cases}$$ cioè

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

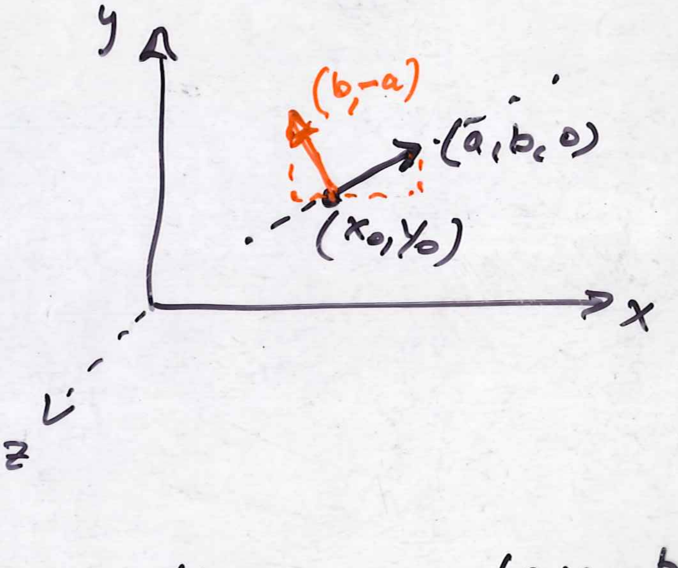
in forma non parametrica: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Idem per gli altri 2 assi.

---

una retta che giace nel piano xOy che eq. param. ha?

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = 0 \end{cases}$$



$a \neq 0$, $b \neq 0$

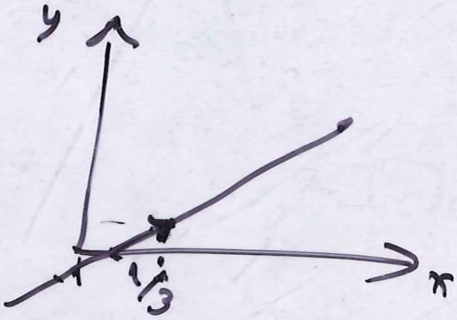
$$\begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(x-x_0) - a(y-y_0) = 0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5y = 15t - 1 \\ x = 5t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 5t \\ y = 3t - 1/5 \\ z = 0 \end{cases}$$



$$y = \frac{3}{5} x - \frac{1}{5}$$

ES2

Eq. param. della retta r per $A = (2, 1, 3)$ e // alla retta $s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$

$v_s = (1, -3, 0)$: perché $r // s$, r deve avere lo stesso vett. direttivo di s (o vett. proporzionale)

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3 + 0t \end{cases}$$

ES3

retta per $A = (3,1,2)$

e $\perp$ alle 2 rette di equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases} \quad e \quad \frac{x-1}{2} = 3y-1 = \frac{4z+1}{3}$$

per A e con un certo vettore direzione $\underline{u} = (a,b,c)$

$$(*) \quad \begin{cases} x = 3 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 2 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(a,b,c) ?

Vettori che danno la direz. delle 2 rette

$\underline{v} = (1,-1,2)$ si ricava dai coeff. di t nell'eq. param.

$$\underset{\frac{1}{}}{\frac{x-1}{2}} = \underset{\frac{y-1/3}{\frac{1}{3}}}{3y-1} = \underset{\frac{z+1/4}{3/4}}{\frac{4z+1}{3}} = t \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ 3y-1 = t \\ 4z+1 = 3t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1/3 + 1/3\, t \\ z = -1/4 + 3/4\, t \end{cases} \Rightarrow \underline{w} = \left(2, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\underline{u} = \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \Big(\underset{a}{-\frac{3}{4} - \frac{2}{3}},\ \underset{b}{4 - \frac{3}{4}},\ \underset{c}{\frac{1}{3} + 2}\Big)$$

sostituisco nelle equazioni (*) :

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{17}{12} t \\ y = 1 + \frac{13}{4} t \\ z = 2 + \frac{7}{3} t \end{cases}$$

queste sono le equazioni parametriche della retta richiesta.

Altra via per determinare $\underline{u}$.
Se deve essere $\perp$ $\underline{v} = (1, -1, 2)$ e $\perp$ $\underline{w} = (2, \frac{1}{3}, \frac{3}{4})$
$\underline{u} = (a, b, c)$ deve soddisfare entrambe le equazioni

$$\begin{cases} \underline{u} \circ \underline{v} = 0 \\ \underline{u} \circ \underline{w} = 0 \end{cases}$$

cioè
$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a + \frac{1}{3} b + \frac{3}{4} c = 0 \end{cases}$$

o anche
$$\begin{cases} b = a + 2c \\ 24a + 4b + 9c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = a + 2c \\ 28a + 17c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} a = -17K \\ b = (-17+56)K \\ c = 28K \end{matrix}$$

Scegliendo $k = 1$ trovo
$$\begin{cases} x = 3 - 17t \\ y = 1 + 39t \\ z = 2 + 28t \end{cases}$$

Scegliendo $K = \frac{1}{12}$ trovo
$$\begin{cases} x = 3 + \frac{-17}{12} t \\ y = 1 + 13/4\, t \\ z = 2 + 7/3\, t \end{cases}$$
come sopra.

ES4

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + y - z = 2 \end{cases}$$

Rappresenta una retta nello spazio 3D ?

quali sono i punti di $\mathbb{R}^3$ soluz del sistema ?

$$\begin{cases} z = 4x + y - 2 \\ x - 2y + 12x + 3y - 6 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} z = 4x + y - 2 \\ 13x + y = 7 \end{cases}$$

sist. lin di 2 eq in 3 inc. esistono ∞ soluzioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 13t \\ z = 4t + 7 - 13t - 2 = -9t + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 7 - 13t \\ z = 5 - 9t \end{cases}$$

le soluz sono tutti e soli i punti che stanno sulla retta passante per $A = (0, 7, 5)$ e di vettore direttore $(1, -13, -9)$

Alcuni degli esercizi precedenti sono stati svolti durante il tutoraggio del 21/9

mentre i due esercizi che seguono erano stati risolti (a richiesta) all'inizio della lezione del 21/9.

Sono stati raccolti in modo da separare gli argomenti riguardanti vettori e geom. analitica da quelli riguardanti i numeri complessi

ES 11.5 . Nel piano: $A = (a_1, a_2)$

$B = (b_1, b_2)$

$C = (2b_1, 2b_2)$

considerare l'uguaglianza:

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

Dire se è:
- A) vera
- B) falsa
- C) vera solo per partic. valori di a_1, a_2, b_1, b_2

$$\overrightarrow{AC} = (2b_1 - a_1, 2b_2 - a_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$2\overrightarrow{AB} = (2b_1 - 2a_1, 2b_2 - 2a_2)$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} 2\cancel{b_1} - a_1 = 2\cancel{b_1} - 2a_1 \\ 2\cancel{b_2} - a_2 = 2\cancel{b_2} - 2a_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

quindi la validità dell'uguaglianza

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$

dipende dalle coordinate di A.

Vale solo se $A \equiv O$

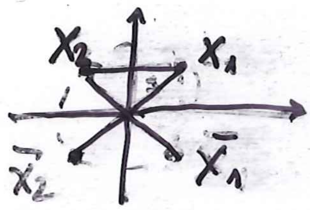
Quindi la risposta è (C).

x^4+1 non ha radici reali

$\hookrightarrow$ $x^4+1=0$ ha soluz. complesse

$$\Updownarrow$$

$x^4=-1$ $\Longrightarrow$



$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x^4+1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-\bar{x}_1)(x-\bar{x}_2)$$

scomposizione in polinomi di 1° grado a coeff. complessi

se lo voglio a coeff. reali:

$$x^4+1 = \left(x^2-2(\mathrm{Re}\,x_1)x+|x_1|^2\right)\left(x^2-2(\mathrm{Re}\,x_2)x+|x_2|^2\right)$$

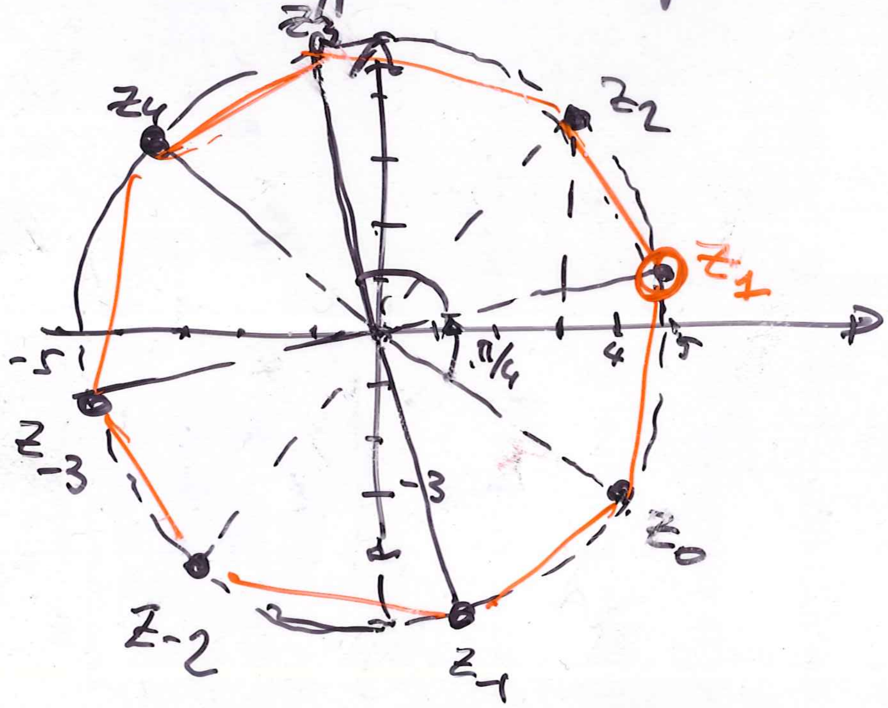
$$=\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-(-\sqrt{2})x+1\right)=$$

$$=\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)$$

questa è la scomposizione del polinomio x^4+1 in polinomi a coeff. reali

IRRIDUCIBILI perché in entrambi i casi $\Delta=(\sqrt{2})^2-4=-2<0$

14.8 $z_0 = 4-3i$ è una radice ottava di un numero complesso $w = (z_0)^8$. Si scrivano in forma algebrica tutte le altre radici ottave di w, dopo averle rapp. nel piano di A.G.



le altre radici di $w = z_0^8$ stanno su una circonf. con centro in $(0,0)$ e raggio $|z_0| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ ai vertici di un ottagono regolare

z_1 è ruotato di $\frac{\pi}{4}$ rispetto a z_0

$$z_1 = z_0 \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= (4-3i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + i\left(4\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{2}\sqrt{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

controllo:

$$|z_1| = \sqrt{\frac{49}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$z_2 = -\operatorname{Im} z_0 + \operatorname{Re} z_0\, i = 3 + 4i$

$z_{-2} = -z_2 = -3 - 4i$

$z_4 = -z_0 = -4 + 3i$

$z_{-3} = -z_1 = -\frac{7}{2}\sqrt{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2}\, i$

$z_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7}{2}\sqrt{2}\, i$

Su MATE. ASS. l'ho trovato spiegato così.

So che, detto

$z_0 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) =$
$= 4 - 3i$,

risulta:

$z_0^8 = w = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ e posso pensare

$\theta = \frac{\varphi}{8}$ come uno degli argom. delle radici 8^e di w, essendo gli altri del tipo $\theta + \frac{2\pi}{8}k = \theta + k\frac{\pi}{4}$

le radici sono: $\Longrightarrow$

$$\sqrt[8]{r}\left(\cos\left(\theta + k\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta + k\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 5\left(\left(\cos\theta \cos\frac{k\pi}{4} - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\frac{k\pi}{4}\right) + i\left(\operatorname{sen}\theta \cos\frac{k\pi}{4} + \cos\theta \operatorname{sen}\frac{k\pi}{4}\right)\right)$$

Ma, essendo $\rho = 5$, risulta:

$5\cos\theta = 4$

$5\operatorname{sen}\theta = -3$

ecc..... sostituendo nella formula precedente

Risolvere in $\mathbb{C}$:

$$i z^3 = \overline{z}$$

1ª domanda: $z = 0$ è una soluzione?
sì.

Se $z \neq 0$ scrivo $z = \rho(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)$

Sostituisco

$$i\left(\rho^3(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta)\right) = \rho\left(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)\right)$$

$\rho \neq 0$ poiché $z \neq 0$ $\Rightarrow$ divido per ρ

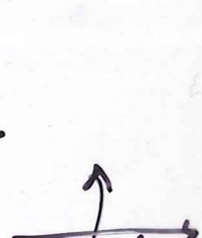
$$i\left(\rho^2(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta)\right) = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)$$

moltiplico per $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$i\left(\rho^2(\cos 4\theta + i\,\mathrm{sen}\,4\theta)\right) = \underbrace{\cos 0}_{=1} + i\,\underbrace{\mathrm{sen}\,0}_{=0}$$

moltiplico per $(-i)$

$$\rho^2(\cos 4\theta + i\,\mathrm{sen}\,4\theta) = -i$$



$$\begin{cases} \rho^2 = |-i| = 1 \Rightarrow \rho = 1 \\ 4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

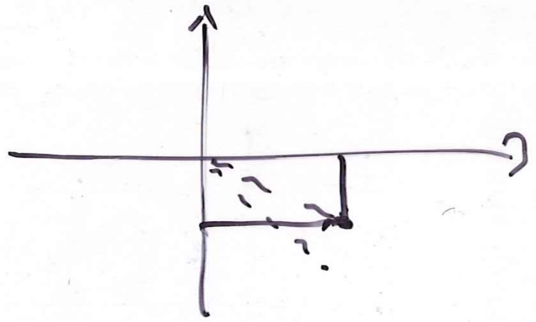
le soluzioni di questo sistema corrispondono a 4 numeri complessi

$$w_k = \cos\left(\frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$k = 0, 1, 2, 3$

$$\cos\left(\frac{-\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos \pi/4}{2}} = a$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos \pi/4}{2}} = b$$



$w_0 = a + ib$

$w_1 = -b + ai$

$w_2 = -a - ib$

$w_3 = b - ai$

Risolvi: $4|z| = z^3$

$z = 0$ è una soluzione

$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) \Rightarrow z^3 = ?$

$|z| = ?$

$z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen} 3\theta)$

$|z| = \rho$

$4\rho = \rho^3 (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$

$4 = \rho^2 (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$

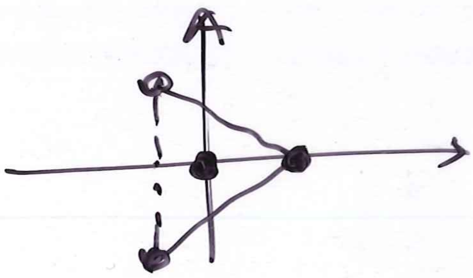
$\uparrow$ che modulo ha 4?
che argomento ha 4?

$|4| = 4$

$\arg 4 = 0 + 2k\pi$

I due numeri complessi sono uguali se e solo se

$$\begin{cases} \rho^2 = 4 & \Longrightarrow \quad \rho = 2 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi & \Longrightarrow \quad \theta = k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$



$z_0 = 2$

$z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= -1 + \sqrt{3}\, i$

$z_2 = -1 - \sqrt{3}\, i$

$$\boxed{(z-i)^4 = 1+\sqrt{3}i}$$

$$z - i = w \quad \Longrightarrow \quad w^4 = 1+\sqrt{3}i$$

trovo le radici quarte di

$$t = 1+\sqrt{3}i$$

$$|t| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2$$

arg t è tale che
$$\cos(\arg t) = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{sen}(\arg t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi le rad. quarte di t sono della forma

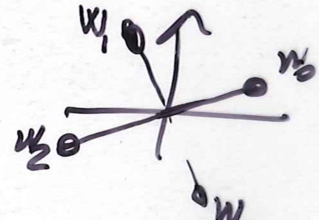
$$w_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$k = 0, 1, 2, 3$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\mathrm{sen}\frac{\pi}{12} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = -w_2$$



$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\,i\right) = -w_3$$

$z = w + i \Rightarrow$

$$z_0 = \frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{72}}{4} + \left(1 + \frac{\sqrt[4]{72}-\sqrt[4]{8}}{4}\right) i$$

ecc....

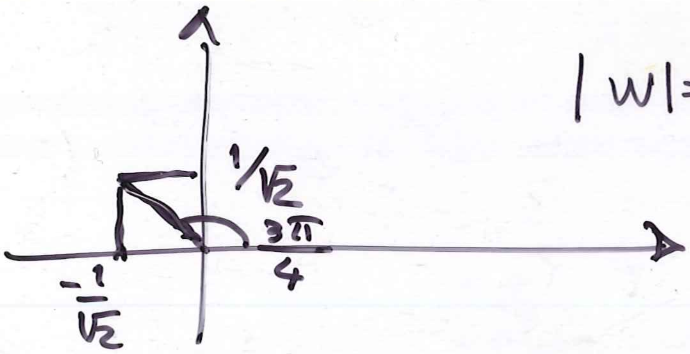
Stabilire se

$w = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ è una radice nona di se stesso.

Ciò è vero se succede che:

$$w^9 = w$$

Per calcolare w^9 vado a scrivere w in forma trigonometrica



$$|w| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg w = \frac{3\pi}{4}$$

$$w^9 = 1^9 \left(\cos\left(\frac{9 \cdot 3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{9 \cdot 3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \cos\frac{27\pi}{4} + i \sin\frac{27\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$\boxed{\frac{27}{4} = \frac{24}{4} + \frac{3}{4} = 6 + \frac{3}{4} \quad : \quad \frac{27}{4}\pi = \frac{3\pi}{4} + 6\pi}$$

VERO!