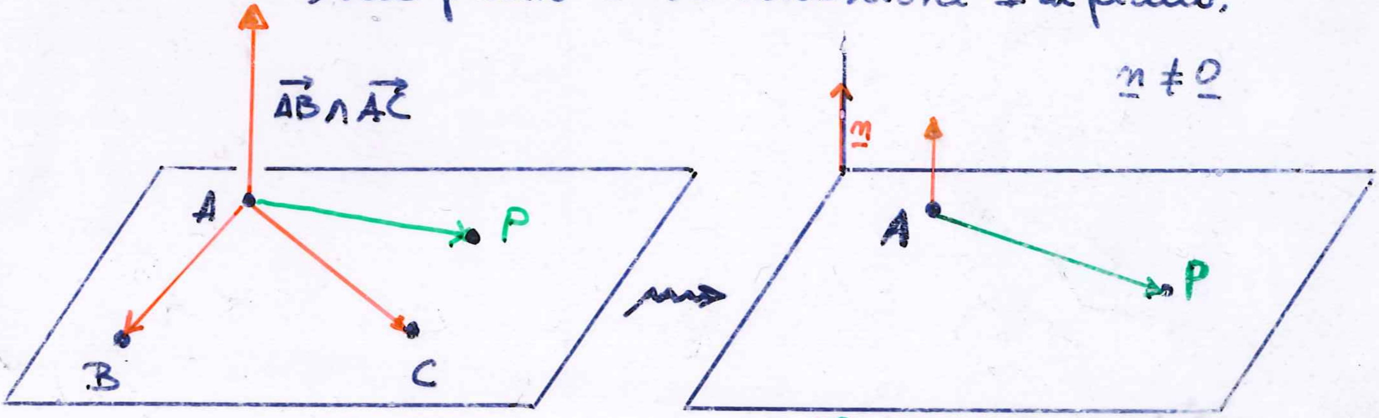
Equazione cartesiana del piano

Un piano è noto

- dati 3 suoi punti non allineati
- data 1 sua retta e un suo punto non appartenente alla retta
- dato un suo punto e la direzione $\perp$ al piano.



$\underline{n} \neq \underline{0}$

$\overrightarrow{AP}$ è ortogonale a $\underline{n}$

$\underline{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

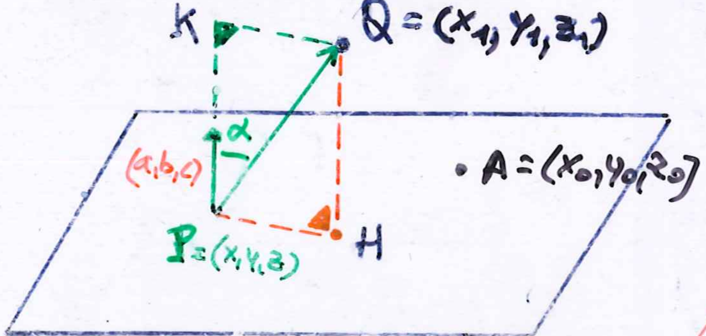
Se $\underline{n}=(a,b,c)$, $A=(x_0,y_0,z_0)$, $P=(x,y,z)$:

$$(a,b,c)\bullet(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

- $(a,b,c)\cdot(x_0,y_0,z_0)=0 \iff$ il piano passa per l'origine
- $a=0 \implies b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$: è // asse x ecc.
- $a=0$ e $b=0 \implies c\neq 0$ eq. piano è $z-z_0=0$: parallelo a xOy ecc.

Distanza di un punto da un piano



$$\overline{QH}=\overline{PK}=\underbrace{\frac{|\underline{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\underline{n}|\cdot\cancel{|\overrightarrow{PQ}|}}}_{\cos\alpha}\cancel{|\overrightarrow{PQ}|}$$

$$=\frac{|a(x_1-x)+b(y_1-y)+c(z_1-z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

con $(x,y,z)\in$ piano $\Rightarrow$

$$\boxed{ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0}$$

$$=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

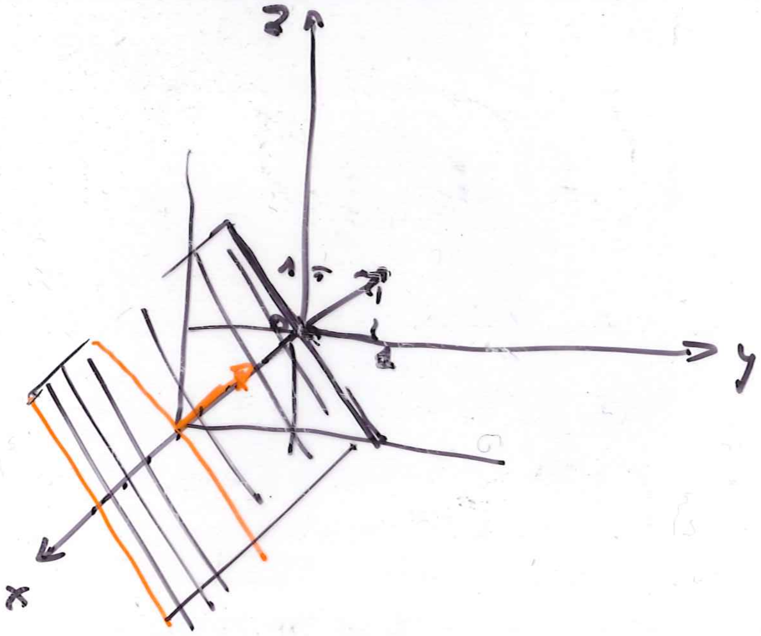
Significato del termine noto,

Se $|(a,b,c)|=1$: a meno del segno, rappresenta la distanza da $(0,0,0)$

piano passante per $O \equiv (0,0,0)$ e con vett. direzione $\underline{n} = (0, 1, 1)$

$(0,1,1) \cdot (x, y, z) = 0$

$\boxed{y + z = 0}$



tutte le rette lasciate come traccia nei piani di equaz. $x = x_0$ passano per l'asse x
$\Rightarrow$ il piano contiene l'asse x
$\Rightarrow$ è // asse x

$y + z + 1 = 0$

$y + (z+1) = 0$ $\qquad A = (0, 0, -1)$

per traslazione il piano rimane // asse x

se manca x $\Rightarrow$ // asse x
y $\Rightarrow$ // asse y

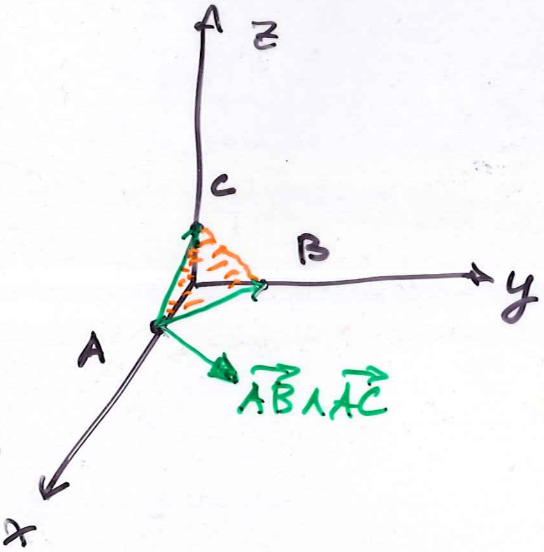
se mancano x e y $\Rightarrow$ // asse x e asse y
$(z = z_0)$
$\Rightarrow$ // piano xOy

Eq. piano passante per $A \equiv (1,0,0)$, $B \equiv (0,1,0)$ e $C \equiv (0,0,1)$

Sia $P = (x,y,z)$ un punto del piano.

Fisso A come punto di appl. dei vettori:

$\vec{AP}$ deve essere $\perp$ al vettore $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ (che è $\perp \vec{AB}$ e $\perp \vec{AC}$ $\Rightarrow$ dà una direz. $\perp$ al piano ABC)



$\vec{AB} = (-1, 1, 0)$

$\vec{AC} = (-1, 0, 1)$

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(1) + \underline{j}(1) + \underline{k}(1) =$$

$$= (1, 1, 1)$$

Eq. piano $\quad \underline{n} \cdot (\vec{AP}) = 0$

$$(1,1,1) \cdot (x-1, y, z) = 0$$

$$(x-1) + y + z = 0$$

In realtà io ho fatto il prodotto misto

$$\vec{AP} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

e quindi potrei semplicemente scrivere l'eq. nella forma

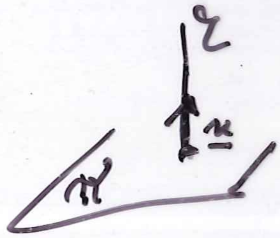
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

che evidenzia che i 3 vettori $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AP}$ DEVONO essere DIPENDENTI.

Distanza di $P = (5,3,-1)$ dal piano π che passa per $A = (0,0,0)$ e è perpendicolare alla retta di eq. param. $\begin{cases} x = 3-t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

1^{o}) Eq. piano:

$ax + by + cz = 0$ poiché passa per l'origine



$\underline{u}$ = vett. direttore della retta.
$= (-1, 1, 2)$

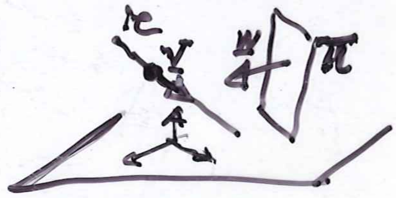
$$\boxed{-x + y + 2z = 0}$$

2^{o}) distanza di P da π

$$\frac{|-5+3-2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

Eq. del piano per $A = (2,1,0)$ e parallelo alla retta r di eq. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$ e $\perp$ piano π di equazione $x + y + z = 0$.

cerco $\underline{v}$ vett. direz della retta
$= (1, 2, 0)$



$\underline{w}$ vett. dir. del piano
$= (1, 1, 1)$

e faccio $\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$= 2\underline{i} - \underline{j} - \underline{k} = (2,-1,-1)$

$2(x-2) - (y-1) - (z-0) = 0 \Leftarrow$ eq. piano

Angoli

Tra rette : è l'angolo tra i loro vettori direzionali (*)

tra piani : " " " "

tra rette e piani

(*) acuto oppure ottuso : attenzione se le due rette hanno vettori direz $\underline{v}$ e $\underline{w}$ può darsi che $\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \dfrac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}||\underline{w}|}$ sia > 0 oppure < 0

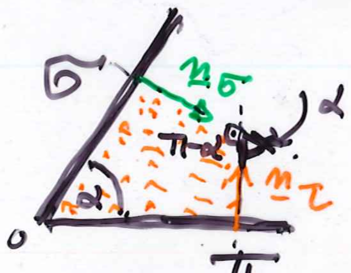
$\downarrow$ $\widehat{\underline{v}\underline{w}}$ acuto

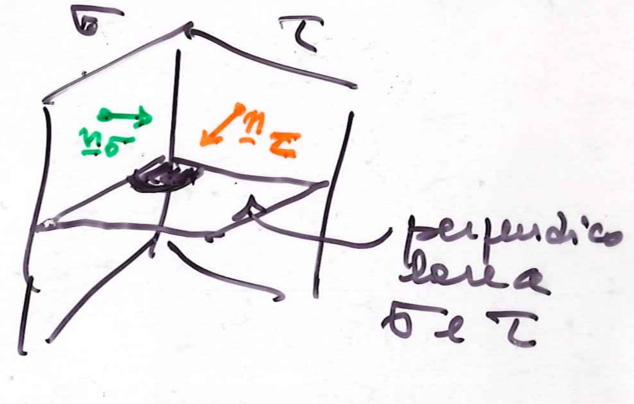
$\downarrow$ $\widehat{\underline{v}\underline{w}}$ = ottuso

Se si richiede l'angolo acuto considerare $\arccos \dfrac{|\underline{v} \cdot \underline{w}|}{|\underline{v}||\underline{w}|}$

Oppure ragionarci : α ottuso $\longrightarrow$ $\pi - \alpha$ acuto corrisp.

Angolo tra piani

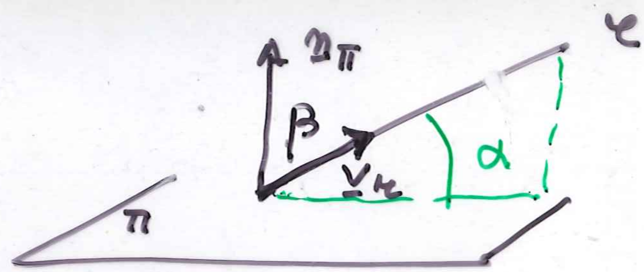




quadrilatero con 2 angoli retti : $\underline{n}_\sigma \perp \sigma$

$\underline{n}_\tau \perp \tau$

I 2 vettori formano tra loro lo stesso angolo (acuto) formato dai 2 piani



$$\cos\beta = \frac{|n_\pi \cdot v_r|}{|n_\pi|\,|v_r|} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$\quad\quad\quad \shortparallel$

$\operatorname{sen}\alpha$ perché α e β sono ang. complementari

$$\Longrightarrow \alpha = \arcsin \frac{|n_\pi \cdot v_r|}{|n_\pi|\,|v_r|}$$

Perché $|n_\pi \cdot v_r|$?

poiché potrebbe essere $n_\pi \cdot v_r < 0$

ma a noi serve $\beta \in [0, \pi/2]$

<u>Esempi</u>:

Angolo tra la retta r di eq. param. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$

e l'asse x

$v_r = (1,2,3)$; $v_x = i = (1,0,0)$

$$\cos \widehat{v_r i} = \frac{(1,2,3)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{1}} = \frac{1+0+0}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

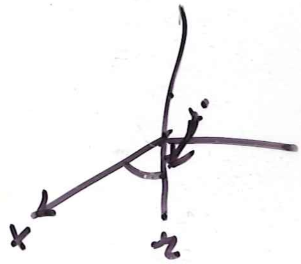
$\Longrightarrow \widehat{v_r i} = \arccos 1/\sqrt{14}$

angolo tra $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ e il piano

yOz ? ($x = 0$ eq del piano $\Rightarrow$ vett. direz. $(1,0,0)$)

$\underline{v}_r = (1, 2, 3)$

angolo $=$ arcsen $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$



Ciò chiude quanto si voleva fare su vettori e geom analitica, salvo una breve meditazione sulle rette in piani // xOz o yOz che ci servirà nelle funzioni di 2 VARIABILI:

$\begin{cases} y = y_0 \\ z = mx + q \end{cases}$

$y = y_0$ ← piano parallelo al piano xOz

$z = mx + q$ ← piano parallelo all'asse y

quali sono i parametri direttori di questa retta

le componenti del vett. direttore

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = q + mt \end{cases} \Longrightarrow \underline{v} = \underline{(1, 0, m)}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = \bar{m} y + \bar{q} \end{cases} \Longrightarrow \underline{v} = \underline{\underline{(0, 1, \bar{m})}}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = \bar{m} t + q \end{cases}$$

SUCCESSIONI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

Successione : funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$:

$$n \longmapsto a_n$$

Cioè anche : $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$= \{a_n\}$

Esempi:

$\{n^2\} = \{0, 1, 2^2=4, 3^2=9, \ldots, n^2, \ldots\}$

$\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}$: 1 e -1 a seguire alterni

$\{3^{1/n+1}\} = \{3^1=3, 3^{1/2}=\sqrt{3}, 3^{1/3}=\sqrt[3]{3}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{di posto } n}}{3}^{1/n+1}, \ldots\}$

$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{-1}{1}=-1, \frac{0}{2}=0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \ldots \frac{n-1}{n+1} = 1-\frac{2}{n+1}, \ldots\right\}$

Graficamente (ATTENZIONE: DOMINIO $\mathbb{N}$)

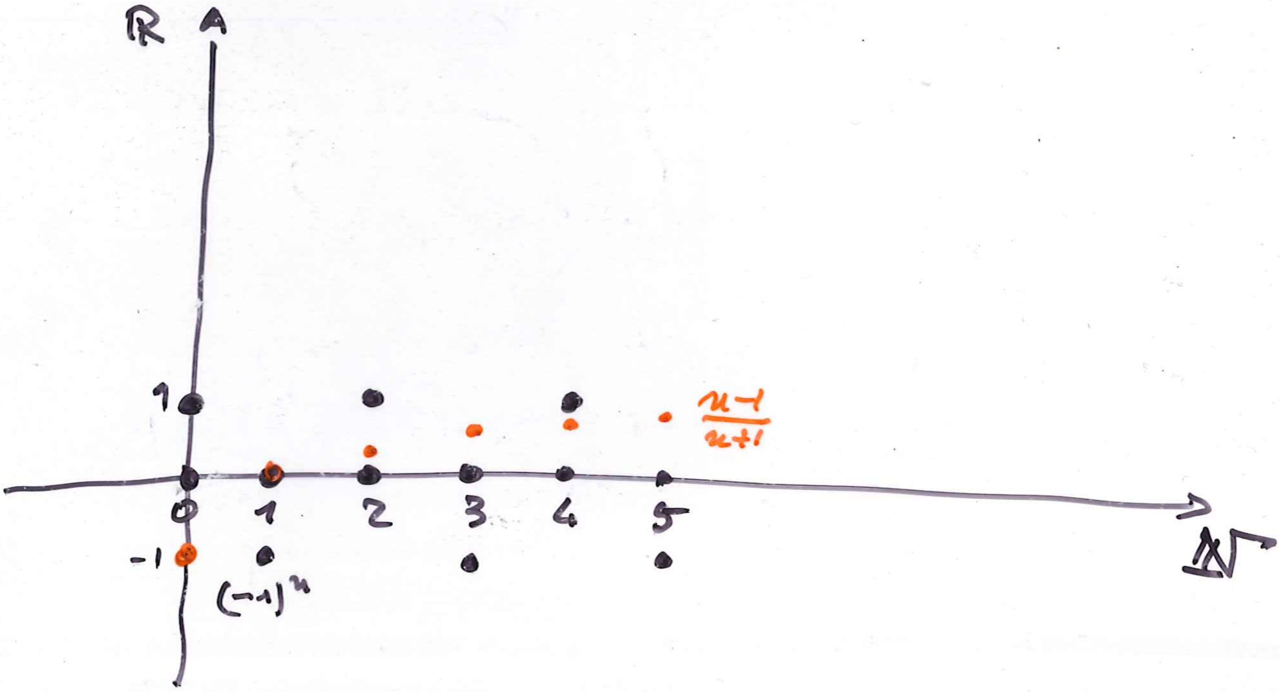
La successione $\{a_n\}$ è detta

- SUPERIORMENTE LIMITATA se l'ins. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è sup. limitato cioè $\exists L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq L$
- INFERIORMENTE LIMITATA se l'ins. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è inf. lim. cioè $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\ell \leq a_n$
- LIMITATA se inf e sup limitata

VEDI ESEMPI PRECEDENTI

$3^0 < 3^{1/n+1} < 3^1 \Rightarrow$ succ. $\{3^{1/n+1}\}$ limitata

Grafico di una successione



Negli esempi precedenti:

$\{n^2\}$ è inferiormente ma non superiormente limitata

$\{(-1)^n\}$ è limitata: $\text{Inf} = \min = -1$
$\text{Sup} = \max = 1$

$\{3^{1/n+1}\}$ è limitata: $\text{Sup} = \max = 3$
Inf ? si vedrà che è 1
(e comunque non è un minimo)

$\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\} = \left\{ 1 - \frac{2}{n+1} \right\}$ è limitata:

$\text{Inf} = \min = -1$
Sup ?... è plausibile che sia 1
ma non è MAX.