Successioni convergenti

$\boxed{\{a_n\} \to \ell}$ la successione $\{a_n\}$ CONVERGE al numero reale ℓ se:

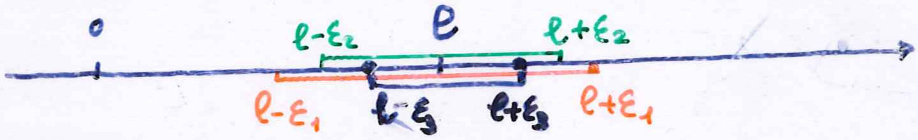
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad \forall n \geq k : \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

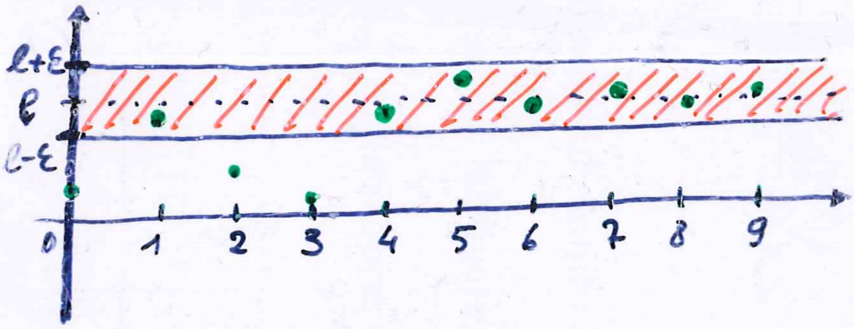
cioè

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

Il limite se esiste è UNICO

Graficamente:





Es. $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\} \to 1$ perché

$\varepsilon = 1/10$

Successioni divergenti

$\boxed{\{a_n\} \to +\infty}$ la successione DIVERGE A $+\infty$ se:

$\forall M > 0$, reale, $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$

$a_n > M \Rightarrow$ SUCC. NON SUPER. LIMITATA

$\boxed{\{a_n\} \to -\infty}$ la successione DIVERGE A $-\infty$ se:

$\forall M > 0$ reale $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$

$a_n < -M \Rightarrow$ SUCC. NON INF. LIM.

Successioni irregolari

Es. $\{(-1)^n\}$, $\{(-2)^n\}$

TEOR. dell'UNICITÀ del LIMITE di una successione convergente.

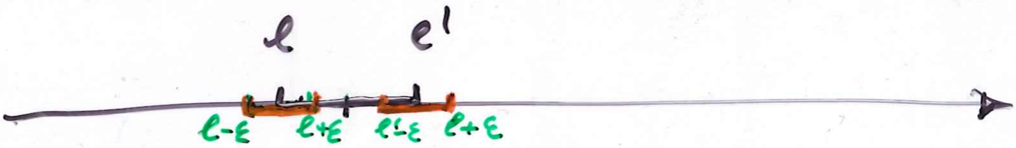
Se una succ. $\{a_n\}$ ammette un limite finito $l \in \mathbb{R}$ allora questo limite è unico.

DIM. per assurdo

Supponiamo che $\{a_n\} \to l$

$\{a_n\} \to l' \neq l$

($l' > l$ ad es.)



Scelgo $\varepsilon < \frac{|l'-l|}{2}$ ad es. $\varepsilon = \frac{|l'-l|}{4}$

Applico la def di limite a l:

- per $\varepsilon = \frac{|l'-l|}{4}$ esiste un $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$

$|a_n - l| < \frac{|l'-l|}{4}$ cioè $l-\varepsilon < a_n < \underline{l+\varepsilon}$

Applico la def di lim. a l':

- per $\varepsilon = \frac{|l'-l|}{4}$ esiste $k' \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k'$

$|a_n - l'| < \frac{|l'-l|}{4}$. cioè $\underline{l'-\varepsilon} < a_n < l'+\varepsilon$

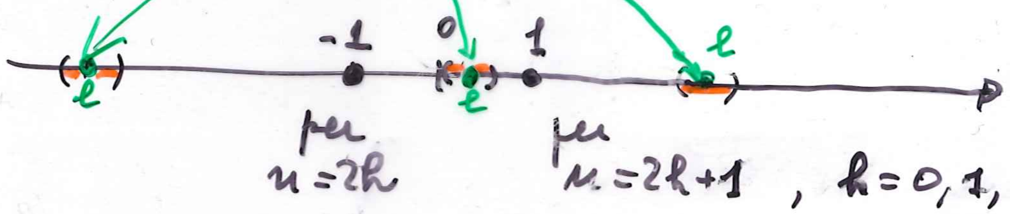
Prendo il più grande tra k e k': K

$\Rightarrow \forall n \geq K$ avrei $l'-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

ASSURDO (vedi figura!)

$\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ ha limite?

L'eventuale limite l non può stare in $(-\infty, -1)$ né in $(-1, 1)$ né in $(1, +\infty)$ come mostra il disegno



: intervalli che non contengono $1, -1$

in un intervallo centrato in $l = 1$ e di semiampiezza $\varepsilon > 0$ stanno sicuramente tutti gli ∞ elementi della succ. del tipo $(-1)^{2h}$

ma ci stanno anche gli altri?

IMPORTANZA DI $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$

Se prendo $\varepsilon = 3$ sì: in $(-2, 4)$ cadono anche gli elementi del tipo $(-1)^{2h+1} = -1$

Ma se prendo $\varepsilon = 1$ non va già più bene perché $-1 \notin (0, 2)$

IMPORTANZA DI $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow l = 1$ non è limite per la succ. $\{(-1)^n\}$

Con lo stesso ragionamento provo che anche $l = -1$ non è limite per la succ.

$\Longrightarrow$ la succ. non ha limite.

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$? converge a 0 ?

Sì perché $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k$ t.c.

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

cioè succede per tutti gli $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\boxed{\text{Ad es}}$ se $\varepsilon = \frac{1}{10}$ basta prendere $k = 11$:

$$\frac{1}{11} < \frac{1}{10}$$

Se $\varepsilon = \frac{1}{10^7}$: basta prendere $k = 10^7 + 1$:

$$\frac{1}{10^7+1} < \frac{1}{10^7}$$

Se $\varepsilon = \frac{2}{11}$: $\frac{1}{n} < \frac{2}{11} \iff n > \frac{11}{2}$

per $k = 6$: $\frac{1}{6} < \frac{2}{11}$ ok.

Se $\varepsilon = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{3\sqrt{2}} \iff n > 3\sqrt{2}$

$$k = 5 \implies \frac{1}{5} < \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\} \to 1 \qquad \text{perché....}$$

Osservo che

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

Per mostrare che tende a 1 considero

$\varepsilon = 10^{-h} \qquad h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\left| \cancel{1} - \frac{2}{n+1} - \cancel{1} \right| < \varepsilon \qquad \text{per quali } n?$$

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

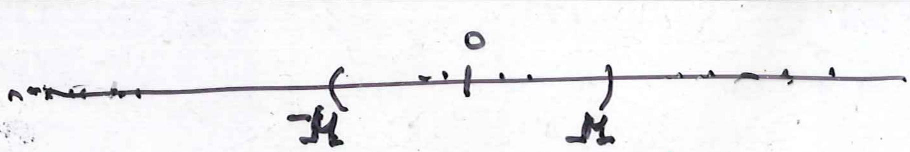
$$\iff n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 = 2 \cdot 10^{h} - 1$$

$$\text{se } k = 2 \cdot 10^{h} \Rightarrow \frac{2}{2 \cdot 10^{h} + 1} < \frac{1}{10^{h}}$$

e per gli $n > k$ ovviamente anche.

<u>Si riesce a coordinare a</u> ε <u>l'opportuno</u> $k \in \mathbb{N}$ semplicemente con una diseq. in questo e nel precedente esempio.

Ma di solito le disequazioni sono più difficili e quindi serve un metodo più veloce e standard.



Le successioni divergenti, per definizione, sono non limitate (superiormente quelle che tendono a $+\infty$, inf. se $\to -\infty$). Invece:

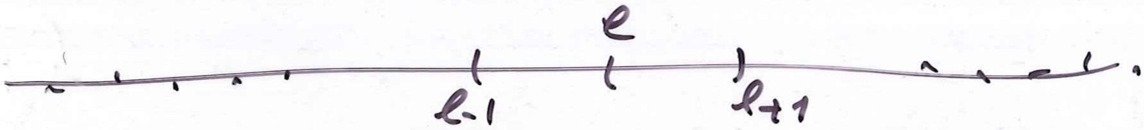
TEOR. Le successioni convergenti sono limitate.

DIM. $\{a_n\} \to l$

Fisso $\varepsilon = 1$. Per def di limite $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si ha

$$l-1 < a_n < l+1$$

Al di fuori dell'intervallo $(l-1, l+1)$ rimangono $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$: un numero finito di punti



Se a_s è il più piccolo tra $a_0, \dots, a_{k-1}$ e a_r è " " grande ...

basta prendere come delimitazione inferiore per la succ.

$$\min(a_s, l-1)$$

e come delimitazione superiore

$$\max(a_r, l+1)$$ $\Rightarrow \{a_n\}$ è un insieme limitato.

c.v.d.

È vero che ogni succ. limitata è convergente?

$$\{(-1)^n\}$$

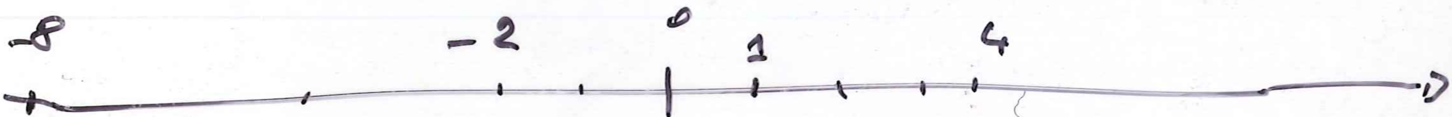
è limitata ma non è convergente.

Condizione NECESSARIA perché $\{a_n\}$ converga è che sia limitata
(non è SUFFICIENTE!)

<u>Succ.</u> non convergenti né divergenti (a $+\infty$ o a $-\infty$) si dicono <u>irregolari</u>

Esistono succ. irregolari non limitate
Ad es.

$$\{(-2)^n\}$$



$$\{(-2)^{2k}\} \longrightarrow +\infty$$

$$\{(-2)^{2k+1}\} \longrightarrow -\infty$$

ma $\{(-2)^n\}$ non converge e non diverge.

Successioni monotóne.

$\{a_n\}$ monotona $\boxed{\text{crescente}}$ (non decrescente) se $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$

" strettamente crescente ..... $a_n < a_{n+1}$

" $\boxed{\text{decrescente}}$ (non crescente) se $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$

" Strett. decresc " " : $a_n > a_{n+1}$

cioè $\exists k \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$ succede che...

TEOR sul carattere delle succ. monotone

Non sono mai irregolari:

se $\{a_n\}$ è "definitivamente crescente" (non decrescente) $\{a_n\} \to \operatorname{Sup} a_n$

se $\{a_n\}$ è "definitivamente decrescente" (non crescente) $\{a_n\} \to \operatorname{Inf} a_n$

ove $\operatorname{Sup} a_n = +\infty$ se $\{a_n\}$ non è sup limitata e
$\operatorname{Inf} a_n = -\infty$ inf.

ESEMPIO. Per quali $q \in \mathbb{R}$ è monotona la succ. $\{a_n\} = \{q^n\}$?

Se $q > 1$: $q^{n+1} > q^n$ monotona CRESCENTE NON SUP. LIMITATA

Se $q = 1$: $\{1^n\}$ successione costante (LIMITE : 1)

Se $0 < q < 1$: $0 < q^{n+1} < q^n$ monotona DECRESCENTE INFERIORMENTE LIMITATA

Se $q = 0$: $\{0^n, n \geq 1\}$ successione costante (LIMITE 0)

Se $-1 < q < 0$: SUCCESSIONE A SEGNI ALTERNI ma $|q^n| = |(-q)^n|$

Se $q = -1$ $\{(-1)^n\}$ successione IRREGOLARE

Se $q < -1$: successione IRREGOLARE

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Se } q > 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \\ \text{Se } q = 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\ \text{se } |q| < 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \end{array}}$$

Ricordare

$\{q^n\}$ per quali valori è monotona (crescente o decrescente)?

$\boxed{q > 1}$: è vero che $q^{n+1} > q^n$?

DIVERGE a $+\infty$

da $q > 1$ moltiplicando per il numero positivo q^n entrambi i membri

$q^{n+1} = q^n \cdot q > q^n \cdot 1 = q^n$

$\Downarrow$

monotona strett. crescente e superillimitata

$\boxed{q = 1}$ limitata limite : 1

$q^n = 1 \quad \forall n \Rightarrow$ monotona non decrescente $q^n \leq q^{n+1}$

$\boxed{0 < q < 1}$ limitata infer. da 0: $0 < q^n \leq 1$

$q^n > 0 \Rightarrow q \cdot q^n < 1 \cdot q^n$

cioè $q^{n+1} < q^n$

$\Downarrow$

$\{q^n\} \to \inf\{q^n\} = 0$ monotona strett. decrescente

$q = 0$ limitata e tende a 0

$0^n = 0 \Rightarrow$ non decrescente e non crescente

$-1 < q < 0$ $\quad q^{2k} > 0 \quad q^{2k+1} < 0$??

NON MONOTONA

$\boxed{-1 < q < 0}$ $\quad \{q^n\}$ ha segni alterni

$|q^n| = |q|^n$ e $0 < |q| < 1$ $\quad \{|q|^n\} \to 0$

allora anche $\{q^n\}$ ha limite 0?

$\forall \varepsilon \ \exists \ k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$

$$|q^n - 0| < \varepsilon \ ?$$

Dato che $\{|q|^n\} \longrightarrow 0$ si ha

$\forall \varepsilon \ \exists k$ t.c. $\forall n \geq k$

$$\big|\,|q|^n - 0\big| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\big|\,|q^n|\,\big| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|q^n| < \varepsilon$$

Sì!

In tutti gli altri casi la succ. è irregolare.

TEOREMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO

1) PERMANENZA DEL SEGNO

$\{a_n\} \to a$ con $a > 0$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si ha $a_n > 0$

si rilegge anche:

$\{a_n\} \to a$ con $a_n \leq 0$ (almeno da un certo indice in poi) $\Rightarrow a \leq 0$

Valgono anche le versioni con il cambio di verso nelle disuguaglianze.

2) (CONSEGUENZA che si prova dopo "OPERAZIONI SUI LIMITI")

Se $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \to a \\ \{b_n\} \to b\end{array}\right]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ (o almeno $\forall n \geq k$ con $k \in \mathbb{N}$ fissato) $a_n \leq b_n$

Allora $a \leq b$.

3) CONFRONTO

$\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \to \ell \\ \{c_n\} \to \ell\end{array}\right]$ e $\forall n \ldots : a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow \{b_n\} \to \ell$

4) LIMITATEZZA DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI

OPERAZIONI SUI LIMITI FINITI

Siano $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$ successioni convergenti (a, b sono quindi FINITI). Allora

- $\{a_n + b_n\} \to a + b$
- $\{-b_n\} \to -b$ e quindi $\{a_n - b_n\} \to a - b$
- $\{a_n b_n\} \to ab$ PER VEDERLO SERVE 4
- $\left\{\frac{1}{b_n}\right\} \to \frac{1}{b}$ purché $\forall n$ sia $b_n \neq 0$ e sia $b \neq 0$: SERVE 1
- e quindi $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{a}{b}$ " " "
- $\{a_n^{b_n}\} \to \{a^b\}$ purché $\forall n$ sia $a_n > 0$ e sia $a > 0$.

ES $\left\{ \frac{1-2n}{n^2} \right\}$

$$\left\{ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3n^2}{1-2n^2} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1 - 1/n}{\frac{3n^2}{1-2n^2}} \right\}$$

$$\left\{ 2^{\frac{1-2n}{n^2}} \right\}$$

$$\left\{ \left(\frac{2n-1}{n} \right)^{\frac{3n^2}{1-2n^2}} \right\}$$

Una regola generale

$$\left\{ \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_1 n + b_0} \right\} \to ?$$

55.1

$$\left\{\frac{1-2n}{n^2}\right\} \longrightarrow 0 \qquad \{2\} \to 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2n}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot 0 = 0^2 - 0 = 0$$

$$\left\{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{3n^2}{1-2n^2}\right\} \to ?$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1-2n^2}{3n^2}}\right) =$$

$$= (1-0)\cdot\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3n^2}-\frac{2n^2}{3n^2}\right.} =$$

$$= (1-0)\cdot\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3n^2}-\frac{2}{3}\right)} = 1\cdot\frac{1}{0-\frac{2}{3}} =$$

$$= -\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{\cancel{n}} \cdot \frac{3n^{\cancel{2}}}{1-2n^2} =$$

TERRENO MINATO:

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 - 3n}{1-2n^2} \overset{??}{=}$$

al num. e al denom ho somme di successioni almeno alcune delle quali divergono NON VALGONO I TEOREMI su somma prodotto ecc. delle succ. convergenti

TENDE A 1

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\cancel{n^2}\left(1-\frac{3n}{3n^2}\right)}{-2\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)} \rightarrow$$

TENDE A 1

$$= -\frac{3}{2}$$

---

k grado MAX al numeratore
h grado MAX al denom.

$$\lim_{\boxed{n\to+\infty}} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_1 n + b_0} = \qquad a_k \neq 0 \quad b_h \neq 0$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k \left(1 + (\dots\dots)/a_k n^k\right)}{b_h n^h \left(1 + (\quad)/b_h n^h\right)} =$$

$\to 1$

$\to 1$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k}{b_h n^h} \; ?$$

VEDI ESEMPI SUCCESSIVI

$k < h$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x}}{-x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{x} = \underline{\underline{0}}$$

$k = h$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}} = -2$$

limite finito $= \frac{a_k}{b_k}$

$k > h$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{-\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -2x = -\infty$$

Diverge con il segno di $\frac{a_k}{b_h}$