TEOREMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO

1) PERMANENZA DEL SEGNO

$\{a_n\} \to a$ con $a > 0$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si ha $a_n > 0$

si rilegge anche:

$\{a_n\} \to a$ con $a_n \leq 0$ (almeno da un certo indice in poi) $\Rightarrow a \leq 0$

Valgono anche le versioni con il cambio di verso nelle disuguaglianze.

2) (CONSEGUENZA che si prova dopo "OPERAZIONI SUI LIMITI")

Se $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \to a \\ \{b_n\} \to b\end{array}\right]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ (o almeno $\forall n \geq k$ con $k \in \mathbb{N}$ fissato) $a_n \leq b_n$

Allora $a \leq b$.

3) CONFRONTO

$\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \to \ell \\ \{c_n\} \to \ell\end{array}\right]$ e $\forall n \ldots : a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow \{b_n\} \to \ell$

4) LIMITATEZZA DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI

OPERAZIONI SUI LIMITI FINITI

Siano $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$ successioni convergenti (a, b sono quindi FINITI). Allora

- $\{a_n + b_n\} \to a + b$
- $\{-b_n\} \to -b$ e quindi $\{a_n - b_n\} \to a - b$
- $\{a_n b_n\} \to ab$ PER VEDERLO SERVE 4
- $\left\{\frac{1}{b_n}\right\} \to \frac{1}{b}$ purché $\forall n$ sia $b_n \neq 0$ e sia $b \neq 0$: SERVE 1
- e quindi $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{a}{b}$ " " "
- $\{a_n^{b_n}\} \to \{a^b\}$ purché $\forall n$ sia $a_n > 0$ e sia $a > 0$.

TEOR della PERM. del SEGNO

Sia $\{a_n\}$ convergente a un limite finito $a \neq 0$. Allora se $a>0$ $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ anche $a_n > 0$;

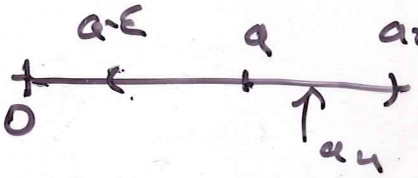
se $a<0$ $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ anche $a_n < 0$.

Dimostro la prima

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq k$

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$



Prendo in particolare $\varepsilon = \frac{a}{2}$

due $\exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq k$

$$0 < \frac{a}{2} = a - \frac{a}{2} < a_n < a + \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < a_n.$$

C.V.D.

Per la seconda versione ($a<0$) basta dire che $\{-a_n\} \to -a$, $-a>0$

$\Rightarrow \exists k \mid \forall n \geq k \quad -a_n > 0$

$\Rightarrow \quad a_n < 0.$

Sia $\{a_n\} \to a$ e sia $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

è vero che $\boxed{a > 0}$?

No: posso dire solo che $a \geq 0$

ES. $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$.

E se le successioni fossero divergenti?

Sia $\{a_n\} \to +\infty$. È vero che $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ si ha $a_n > 0$?

Sì: nella def. di succ. divergente a $+\infty$ ho solo fissato $M = 0$ (se si vuole $M > 0$: $M = 1 > 0$ ... ecc.)

Analogamente se $\{a_n\} \to -\infty$.

E invece quelle proposizioni che in precedenza avevamo visto essere equivalenti?

Se $\{a_n\}$ diverge e $a_n \geq 0$ $\forall n \geq k$ (k opportuno)

$\Longrightarrow$ per forza diverge a $+\infty$.

Analog. a $-\infty$.

---

2) Conseguenza:

$\{a_n\} \to a \quad \{b_n\} \to b \Rightarrow \{b_n - a_n\} \to b - a$

per i teoremi sull'aritmetica dei limiti

se $\forall n \geq k$ opportuno : $b_n \geq a_n$

allora $b_n - a_n \geq 0 \quad \Rightarrow b - a \geq 0 \Rightarrow b \geq a$

---

3) TEOR. DEL CONFRONTO

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono allo stesso limite ℓ e supponiamo che $\{c_n\}$ sia tale che almeno per tutti gli $n \geq k$ opportuno risulti

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

Allora anche $\{c_n\}$ converge a $\boxed{\ell}$.

Dim.

$\{a_n\} \to \ell$: $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_a \mid \forall n \geq k_a$ si ha

$(*) \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

$\{b\} \to \ell$: $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_b \mid \forall n \geq k_b$ si ha

$(**) \quad \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$

Sia $k = \max(k_a, k_b)$: $\forall n \geq k$ devono valere $(*)$, $(**)$ cioè

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < \ell + \varepsilon$$

Quindi fissato $\varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq k$ sia

$\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$, cioè $\{c_n\} \to \ell$ | C.V.D.

ARITMETICA delle SUCC. DIVERGENTI e Forme di indecisione.

Se una o ambedue le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ DIVERGONO cosa succede?

I) SOMME - DIFFERENZE

$\{a_n\} \to a \qquad \{b_n\} \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \{a_n \pm b_n\} \to \pm\infty$

$\{a_n\} \to +\infty \qquad \{b_n\} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \{a_n + b_n\} \to +\infty$

$\{a_n\} \to -\infty \qquad \{b_n\} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \{a_n + b_n\} \to -\infty$

E $\{a_n - b_n\}$? $\quad [+\infty - \infty]$ $\quad [-\infty - (-\infty)]$? FORMA DI INDECISIONE

$\boxed{\text{ES.}}$ $\{n - n^2\} \to -\infty$

Bisogna ragionare ogni volta!

$\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\} \to 0$

$\{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+4}\} \to 1$

II) PRODOTTI

$\{a_n\} \to a > 0 \qquad \{b_n\} \to \pm\infty \qquad \{a_n b_n\} \to \pm\infty$

$\qquad a<0 \qquad\qquad \pm\infty \qquad\qquad \mp\infty$

$\{a_n\} \to +\infty \qquad \{b_n\} \to +\infty \qquad \{a_n b_n\} \to +\infty$

ECC. : ARITMETICA DEI SEGNI

E $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\} \to \pm\infty$? $\quad [0 \cdot (+\infty)]$? $\quad [0 \cdot (-\infty)]$? F.I.

$$\lim_{n\to+\infty}(n-n^2) = (+\infty)-(+\infty)$$

$$\stackrel{\perp}{=} \lim_{n\to+\infty}\Big(\underbrace{-n^2}_{\downarrow\ -\infty}\underbrace{\Big(1-\frac{1}{n}\Big)}_{\downarrow\ (1-0)}\Big) = \lim_{n\to+\infty} -n^2 =$$

$$= \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = (+\infty)-(+\infty)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{n+1}}_{\downarrow\ +\infty}\Big(\underbrace{1-\sqrt{\frac{n}{n+1}}}_{1-1=0}\Big)$$ NON VABENE

$\{\sqrt{n}\}\to+\infty$ perché $\forall M>0\ \exists k \mid \forall n\geq k$
si ha $\sqrt{n}>M$
basta prendere $k=M^2+1$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

Razionalizzo il numeratore

vedi considerazioni sulle succ. rapporto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+4}\right) = (+\infty)-(+\infty)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(\cancel{n^2}+2n)-(\cancel{n^2}+4)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+4}} = \frac{+\infty}{+\infty}\ ??$$

Razionalizzo

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}} =$$

$\sqrt{n^2}=|n|=n$ poiché $n>0$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2\cancel{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \to 1}{\cancel{n}\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}_{\to 1^{1/2}=1} + \underbrace{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}_{\to 1}\right)} = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1$$

$\Rightarrow$ la diff. di 2 succ. divergenti allo stesso ∞ può essere

- un infinito
- un numero finito $\neq 0$
- lo zero

FORMA DI INDECISIONE $[\infty - \infty]$

Significa che devo approfondire in che situazione sono.

ES

$$\left\{ \frac{1}{n^2+1} \cdot (2n^2-1) \right\} \to 2$$

$$\left\{ (n^{-3}) \cdot (2n^2-1) \right\} \to 0$$

$$\left\{ \frac{1}{n^2+1} \cdot (n^3) \right\} \to +\infty$$

Significa che $\{b_n\} \to 0$ e i b_n sono tutti (o almeno da un certo n in poi) POSITIVI. In generale $\{b_n\} \to b^+$ se $\forall \varepsilon > 0$ esiste k t.c. se $n \geq k$ $0 < b_n - b < \varepsilon$.

PERCHÉ DEVO PRECISARE che $\{b_n\}$ tende a zero DA DESTRA?

a seconda del segno di a

III) RAPPORTI

$$\{a_n\} \to a \neq 0 \qquad \{b_n\} \to 0+ \qquad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \to \boxed{\pm}\infty$$

Analogamente se $\{b_n\} \to 0^-$ o se $\{a_n\}$ diverge

$$\{a_n\} \to a \text{ finito} \qquad \{b_n\} \to \pm\infty \qquad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \to 0$$

Invece $\{a_n\} \to 0$ $\{b_n\} \to 0$? $\left[\frac{0}{0}\right]$ F.I.

$\{a_n\} \to +\infty$ $\{b_n\} \to +\infty$? $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ F.I.

ES. PRECEDENTI

FORME DI INDECISIONE ARITMETICHE:

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

ESERCIZIO

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^{3/2} - n^{-7/2} + n^{-1} + 1}{n^{-5/2} + n^2 + 5}$$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ è forma di indecisione perché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1 \quad \text{finito} \neq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

cioè posso avere come limite un qualunque numero reale oppure $\pm\infty$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ è f. i. perché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1}}{n^{-2}} = \lim_{n\to+\infty} n^{2-1} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1}}{n^{-1}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-2}}{n^{-1}} = \lim_{n\to+\infty} n^{-1} = 0$$

$\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ irregolare

$\{b_n\} = \{(-2)^n\}$ irregolare

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{(-2)^n} = \frac{1}{2^n}$$

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow 0$$

$$\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$$

$$|\operatorname{sen} n| \leq 1$$

$$\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\underset{\downarrow\, 0}{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\operatorname{sen} n}{n} < \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n}}}$$

TEOREMA dei carabinieri: $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to 0$

La cosa è vera in generale quando moltiplico una succ. $\{a_n\}$ limitata per una $\{b_n\} \longrightarrow 0$.

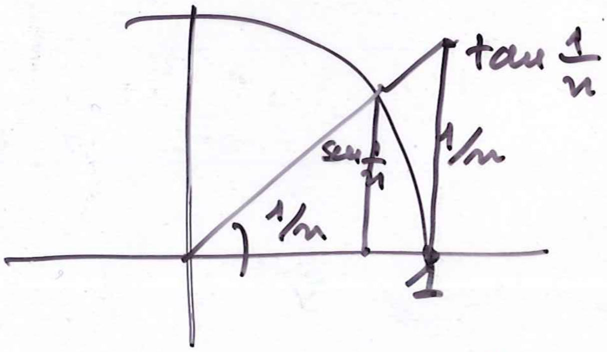
perché $0 < \operatorname{sen}\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow \left\{ \operatorname{sen}\frac{1}{n} \right\} \longrightarrow 0$

FORMA DI INDECISIONE $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n} = 1$$

perché



$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \tan\frac{1}{n}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}$$

osservo che $\operatorname{sen}\frac{1}{n} > 0$

$\Longrightarrow 1 < \frac{1/n}{\operatorname{sen} 1/n} < \frac{1}{\cos 1/n}$ cioè

$$\boxed{\underbrace{\cos\frac{1}{n}}_{\to 1} < \frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n} < \underbrace{1}_{\to 1}}$$

$\Longrightarrow \left\{ \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right\} \longrightarrow 1$

LIMITE NOTEVOLE

$\frac{1}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\frac{1}{n} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\frac{1}{n}} \longrightarrow \sqrt{1 - 0^2} = 1$

ATTENZIONE : perché un rapporto converga non è necessario che convergano (o che siano regolari) la SUCC. NUMERATORE e la SUCC. DENOMINATORE.

ES. $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$ ha il numeratore irregolare ma $|\operatorname{sen} n| \leq 1$

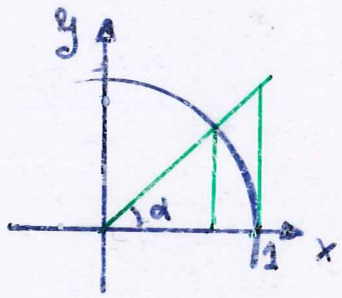
Vale il criterio : $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\} \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{a_n b_n\} \to 0$

Dunque $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\} \to$

Invece $\left\{\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\}$?

e $\left\{n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\}$?

$\left\{\frac{\operatorname{sen} 1/n}{1/n}\right\} \to 1$



se $\{a_n\} \to 0$: $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1$ LIMITE NOTEVOLE

Per quanto riguarda i logaritmi, tener presente che

$$\log_{a_n} b_n = \frac{\log_c b_n}{\log_c a_n} \qquad (a_n > 0, b_n > 0) \quad \neq 1$$

Conviene riportarsi a questa forma, con $\boxed{c > 1}$.

Allora

$$\{a_n\} \to a > 0 \quad \Rightarrow \{\log_c a_n\} \to \log_c a$$

$$\{a_n\} \to +\infty \quad \Rightarrow \{\log_c a_n\} \to +\infty$$

$$\{a_n\} \to 0+ \quad \Rightarrow \{\log_c a_n\} \to -\infty$$

ES. $\left\{\log_{10} \frac{1}{n}\right\} \to$

$$\left\{\log_{10} \frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right\} \to$$

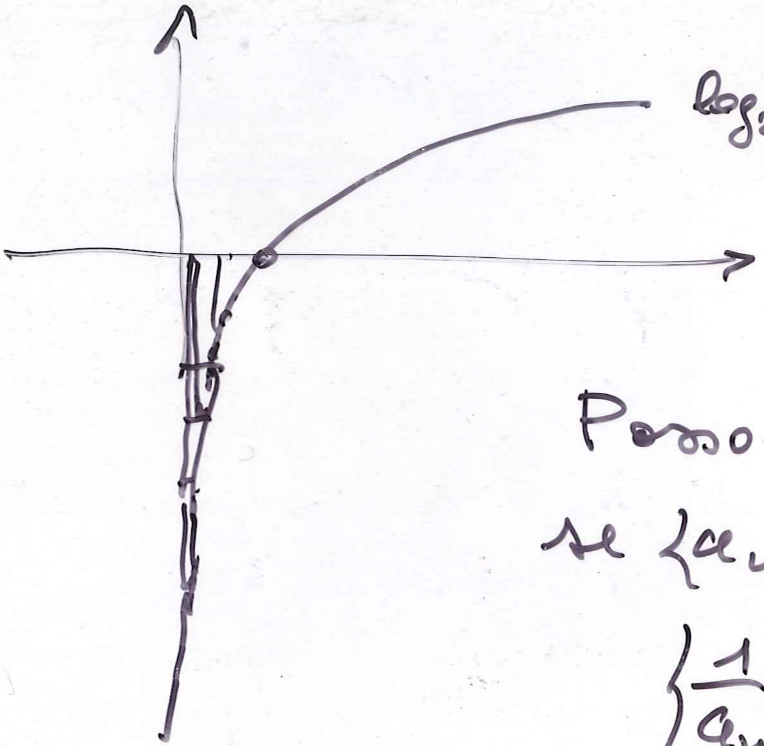
Per gli esponenziali e/o potenze:

$$a_n^{b_n} = c^{b_n \log_c a_n} \qquad (a_n > 0)$$

Non ci sono forme di indecisione per i logaritmi
Invece per gli esponenziali:

$$c^{0 \cdot \infty} \quad \begin{cases} (c^0)^\infty & : [1^\infty] \\ (c^{+\infty})^0 & : [\infty^0] \\ (c^{-\infty})^0 & : [0^0] \end{cases}$$

Non ci sono altre forme di indecisione.



$\{a_n\} \to 0+$

$\{\log_2 a_n\} \to -\infty$

Posso ragionare così

se $\{a_n\} \to 0+$

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty$

$c > 1$

$\left\{\log_c \frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty$

$$\log_c \frac{1}{a_n} = -\log_c a_n$$

$$\Rightarrow \{\log_c a_n\} \to -\infty.$$

Esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \log_{10} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} -\log_{10} n = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \log_{1/2}\left(\frac{n^2+3n}{2n^2-1}\right) = \log_{1/2} \frac{1}{2} = 1.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2-1} = \frac{1}{2}$$