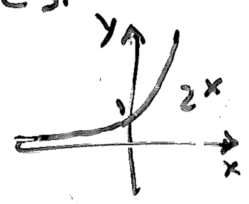
LIMITI di ESPONENZIALI e POTENZE

$\{c^{b_n}\}$ $(c>0)$

Tenendo presente che: se $b_n > b_m \Rightarrow c^{b_n} > c^{b_m}$ (per le cose viste nella monotonia della funzione c^x)

se $\boxed{c>1}$

Es.



se $\{b_n\} \to b \Rightarrow \{c^{b_n}\} \to c^b$

se $\{b_n\} \to +\infty \Rightarrow \{c^{b_n}\} \to +\infty$

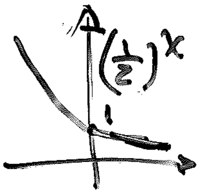
se $\{b_n\} \to -\infty \Rightarrow \{c^{b_n}\} \to 0^+$

poiché $\exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq k$ $b_n < 0 \Rightarrow \{-b_n\} \to +\infty$

$\{c^{-b_n}\} \to +\infty$ e quindi

$\{c^{b_n}\} \to \frac{1}{+\infty} = 0^+$

se $\boxed{0<c<1}$



se $\{b_n\} \to b \Rightarrow \{c^{b_n}\} \to c^b$

se $\{b_n\} \to +\infty \Rightarrow \{c^{b_n}\} \to 0^+$

se $\{b_n\} \to -\infty \Rightarrow \{c^{b_n}\} \to +\infty$

$\boxed{c=1}$

$\{b_n\} \to b \Rightarrow \{1^{b_n}\} = \{1\} \to 1$

ESEMPI

$\{2^{n^2}\}$ poiché $\{n^2\} \to +\infty$

e $2 > 1$

il lim. della succ. è $+\infty$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n^2-1}{n+2n^2}}\right\} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n^2-1}{n+1}}\right\} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0^+$$

base < 1

2)

$\boxed{\text{FISSO } c > 1}$

se ho rappresentato $\{a_n^{b_n}\}$ come $\{c^{b_n \cdot \log_c a_n}\}$, quando incontro forme di indecisione? Quando la presenta l'esponente

$$\{b_n \cdot \log_c a_n\}$$

cioè quando una delle 2 succ. $\{b_n\}$ o $\{\log_c a_n\}$ tende a 0 e l'altra a un infinito.

1°) $\{b_n\} \to 0$ e $\{\log_c a_n\} \to +\infty$

cioè $\{a_n\} \to +\infty$

$$\boxed{[\infty^0]}$$

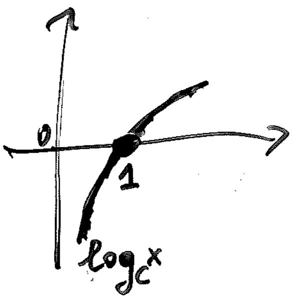
2°) $\{b_n\} \to 0$ e $\{\log_c a_n\} \to -\infty$

cioè $\{a_n\} \to 0^+$

$$\boxed{[0^0]}$$

3°) $\{b_n\} \to +\infty$ $\{\log_c a_n\} \to 0$

$\to$ oppure $-\infty$ cioè $\{a_n\} \to 1$



$$\boxed{[1^\infty]}$$

Queste 3 sono le uniche forme di indecisione per limiti di succ. del tipo $\{a_n^{b_n}\}$.

Insieme S1.0

Perché, se la succ. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \{a_n\}$ converge, deve convergere a un limite compreso tra 2 e 3? Proveremo lunedì che:

A) $\{a_n\}$ è monotona crescente

B) Invece $\{b_n\} = \left\{a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$ è decrescente

C) e vale

$a_m < b_n$, non importa se $m=n$ o $m \neq n$

Allora

se $\{a_n\}$ converge, anche $\{b_n\}$ converge e converge allo stesso limite l e inoltre

$$2 \le a_m < l < b_m \le 4 \quad \forall n, m$$

$n = 1$

$a_1 = 2 \qquad b_1 = (2)^{1+1} = 4$

ma già per $n=5$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = (1{,}2)^6 = 2{,}9\ldots < 3$

e, visto che $l < b_5$, risulta

$2 < l < 3$.

Qualche ESEMPIO

$$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\} \longrightarrow 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\left\{\left(2^{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right\} \longrightarrow 2^{0} = \underline{1}$$

$$\left\{\left(2^{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \longrightarrow 2^{2} = 4$$

$$\left\{\left(2^{n^2}\right)^{-1/n}\right\} \longrightarrow 2^{-\infty} = 0$$

Es. di ∞^0

Per avere esempi di 0^0 sostituire alla base 2 la base $\frac{1}{2}$.

ALTRI ESEMPI DOPO IL CONFRONTO DI ∞

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\} \longrightarrow ?$$

ESEMPIO CHIAVE

· Successione crescente ....

Invece $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è decrescente ....

· Successione limitata (sup. e inf.)

Quindi convergenti. A un numero (che si dimostra irrazionale trascendente) che chiamo

e (NUMERO DI NEPERO)

Prime cifre decimali:

2.718281824 .....

Successione crescente <u>molto lentamente</u>

$n=1$: 2
$n=2$: 2.25
$n=3$: $64/27 = 2.\overline{370}$
$n=4$: $625/256 = 2.44140625$
$\vdots$
$n=10$: $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2.59374246$

Fare l'esercizio di tabulazione sul testo.

E la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ a cosa tende ?

E " $\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right\}$? $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

Allora se $\boxed{\{a_n\} \longrightarrow +\infty}$, da

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor a_n \rfloor} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^{\lfloor a_n \rfloor + 1}$$

ove $\lfloor x \rfloor$ = parte intera di x, cioè il più grande intero $\leq x$

APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO

si ricava

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e}$$

VEDI S11.1

Lo stesso se $\{a_n\} \to -\infty$

ESERCIZI Calcolare il $\lim_{n\to\infty} a_n$ ove a_n è:

- $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n}$

- $\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n}$

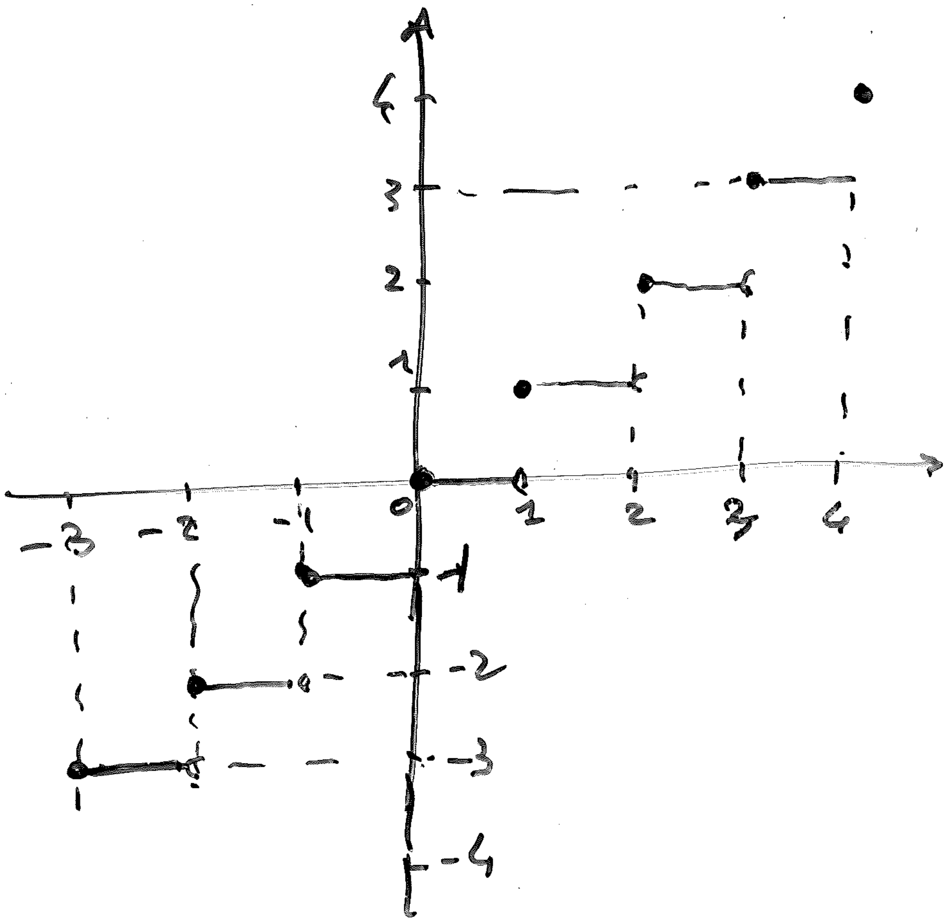
- $\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n}$

- $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n^2}$

- $\left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3}$

$\lfloor x \rfloor$ = parte intera di x =

= il più grande intero $\leq x$



$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor}}_{\downarrow\ \left\{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k\right\}\ \text{converge a } e} \leq \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{a_n} \leq \underbrace{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}}_{\downarrow\ \left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}\right\}\ \text{converge a } e}$$

$$\lfloor a_n \rfloor \leq a_n < \lfloor a_n \rfloor + 1$$

converge a e

converge a e

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\underbrace{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}}_{=1}}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{n+1}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+1}} =$$

$$= e^2$$

In generale $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\{a_n\}\to+\infty$, $\to-\infty$ $\{b_n\}\to+\infty$, $\to-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{a_n}\right)^{b_n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{\alpha}}\right)^{\frac{a_n}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha b_n}{a_n}} =$$

$$= e^{\alpha\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2+n}=[1^\infty]=\boxed{\alpha=-3}$$

$$=e^{\lim_{n\to+\infty}-\frac{3(n^2+n)}{n^2-1}}=e^{-3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1}\right)^{n^3}=[1^\infty]=$$

Come faccio a scrivere

$$\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1} \quad \overset{\text{come}}{=} \quad 1+1/a_n$$

? risolvo una equazione:

$$=1+x$$

$$x=\frac{n^3-5n+1}{n^3+n^2-1}-1=\frac{-n^2-5n+2}{n^3+n^2-1}$$

questa è la succ. $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ che tende a zero

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n^2-1}{-n^2-5n+2}}\right)^{n^3}=$$

$$=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{\frac{n^3+n^2-1}{-n^2-5n+2}}}=$$

$$=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{-n}}=e^{\lim_{n\to+\infty}-n^2}=e^{-\infty}=0^+$$

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{b_n\}\to 0^+ \\ 0^-}} (1+b_n)^{1/b_n} = e$$

$$\Big\downarrow \log_c \qquad (c>1)$$

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{b_n\}\to 0^+ \\ 0^-}} \log_c (1+b_n)^{1/b_n} = \log_c e$$

se $c = e$ $\qquad \log_c e = 1$

$\Rightarrow$ preferiamo i logaritmi in base $\underline{\underline{e}}$

$$\log_e x = \underbrace{\ln x}_{\boxed{\text{logaritmo naturale}}} = \log x$$

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{b_n\}\to 0^+ \\ 0^-}} \frac{1}{b_n} \ln(1+b_n) = 1$$

o più in generale

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{b_n\}\to 0^+ \\ 0^-}} \frac{1}{b_n} \log_c(1+b_n) \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \log_c e$$

$\boxed{\text{Esempio}}$

$$\lim_{n\to+\infty} n \log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = [\infty\cdot 0]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2n}} \cdot \log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\log_{10} e$$

Se $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

- $\lim_{n\to\infty} n \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = [\infty \cdot 0]$

eccetera ....

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$\lim_{n\to\infty} n \log_{10}\left(1+\frac{1}{2n}\right) =$

$\lim_{n\to\infty} n \log_e\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$

} → Svolgimento sui lucidi S12. ....

$\lim_{n\to\infty} n^2 \log_e\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) =$

MA ATTENZIONE AI FALSI ANALOGHI

$\lim_{n\to\infty} n \log_{10}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) = ?$

- $\lim_{n\to\infty} n\underbrace{\left(e^{1/n}-1\right)}_{b_n} = [\infty \cdot 0]$

} → VEDI S12.2

$\Downarrow$

$n = ?$

e in generale: $\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{a_n\}\to 0^+ \text{ oppure } 0^-}} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$

- $\lim_{n\to\infty} \Big[\underbrace{\left(1+1/n\right)^{\sqrt{2}}-1}_{b_n}\Big] n = [0 \cdot \infty] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}-1}{\frac{1}{n}}$

$\Downarrow$

$\ln(b_n+1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$ ....

Svolto su S12.3

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \cdot \ln\left(1 + \frac{2n+3-2n+1}{2n-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 1}{\frac{1\cdot 2}{n}} \cdot \ln\left(1 + \frac{4}{2n-1}\right) = 2$$

$$\boxed{\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{b_n\}\to 0^+ \\ 0^-}} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \log_{10}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

Non è una forma di indecisione !!

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{1/n} - 1\right) = ? \quad [\infty \cdot 0] =$$

Risulta:

$e^{1/n} - 1 = a_n$ con $\{a_n\} \to 0$

↳ Risolvo rispetto a n:

$$e^{1/n} = a_n + 1$$

$$1/n = \ln(1+a_n)$$

$$n = \frac{1}{\ln(1+a_n)}$$

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \{a_n\}\to 0+}} \frac{a_n}{\ln(1+a_n)} = \frac{1}{\lim \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \{b_n\} \to 0^+ \\ 0^-}} \frac{e^{b_n}-1}{b_n} = 1}$$

Infatti $a_n = e^{b_n} - 1 \Rightarrow b_n = \ln(1+a_n)$

ecc. come sopra.

Servirà nel calcolo della derivate

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}} - 1\right] n = [0 \cdot \infty] =$$

$\{b_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}} - 1\right\} \to 0$ e si ha:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}} = 1 + b_n$; inoltre:

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{\ln(1+a_n)^{\sqrt{2}}}{\ln(1+b_n)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{\ln(1+b_n)} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+a_n)^{\sqrt{2}}}{a_n} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2}\, \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \sqrt{2}$$

E, in generale:

$$\boxed{\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \{a_n\} \to 0^+ \\ 0^-}} \frac{(1+a_n)^t - 1}{a_n} = t \qquad \forall t \in \mathbb{R}}$$

① Per ogni successione $\{a_n\}$ che sia divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$) risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

② Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta — con verso specificato 0^+ oppure 0^-

$$\lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^{1/b_n}=e \qquad \left(b_n=\frac{1}{a_n}\right)$$

③ Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1$$

$\ln=\log_e$

$\ln(1+b_n)\sim b_n$ se $\{b_n\}\to 0$

APPLICO IL LOG in base e alla success. ②

④ Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{b_n}-1}{b_n}=1$$

$e^{b_n}-1\sim b_n$ se $\{b_n\}\to 0$

⑤ Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+b_n)^t-1}{b_n}=t \qquad (\forall t\in\mathbb{R})$$

se $\{b_n\}\to 0$: $\forall t\neq 0$ $(1+b_n)^t-1\sim t\,b_n$

LIMITI NOTEVOLI

$\operatorname{sen} b_n\sim b_n$

DEF: Dico che due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono ASINTOTICHE (per $n\to+\infty$) se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$