DIM. del TEOR. di NEPERO:

La succ. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ converge a un numero e (compreso tra 2 e 3)

Dim. Per prima cosa dimostro che:

Vale la disuguaglianza di Bernoulli

$$\boxed{\forall a > -1 \qquad (\underbrace{1+a}_{\text{base positiva}})^n \geq 1+na \qquad \forall n \in \mathbb{N}}$$

si vede "per induzione":

$(1+a)^1 \geq 1+1\cdot a$ O.K.

$(1+a)^2 = 1+2a+a^2 \geq 1+2a$ poiché $a^2 \geq 0$

O.K.

passo iniziale dell'induz. → Da $n=2$ passo a $n=3$ così:

$(1+a)^3 = \underbrace{(1+a)}_{>0}(1+a)^2 \geq (1+a)(1+2a) =$

$= 1+a+2a+2a^2 = 1+3a+2a^2 \geq$

$\geq 1+3a$

O.K.

passaggio da $n-1$ a n → Se ho provato che $(1+a)^{n-1} \geq 1+(n-1)a$

allora:

$(1+a)^n = (1+a)^{n-1}(1+a) \geq (1+(n-1)a)(1+a) =$

$= 1+na+(n-1)a^2 \geq 1+na$

$\Longrightarrow$ vale in generale la disug. di Bernoulli.

Con la disug. di Bernoulli dimostro che

(1) $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è crescente in senso LATO e

(2) $\{b_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è decrescente in senso LATO

Cioè $\forall n \quad b_n \geq a_{n-1}$ (ecc. per b_n)

TESI:

(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$

$\Updownarrow$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ sono tutte quantità ≥ 0

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)$

$\Updownarrow$

$$\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$\Updownarrow$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

Questa è una RISCRITTURA della TESI

ed è certamente vero per la disug. di Bernoulli, che assicura:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)$$

Quindi $\{a_n\}$ è monotona non decrescente (quindi o converge o diverge a $+\infty$)

(2) $\{b_n\}$ è non crescente : $b_{n-1} \geq b_n$

$$\text{TESI} \quad \underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}_{>0} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{>0}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \geq 1+\frac{1}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n}$$

Per la disug. di B.:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+n\left(\frac{+1}{n^2-1}\right) = 1+\frac{n}{n^2-1} \geq$$

$$\geq 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n} \qquad \text{O.K.}$$

Quindi $\{b_n\}$ è monotona non crescente e quindi o converge o diverge a $-\infty$.

(3)

Mostro ora che $\forall n, m \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_m \leq b_n$$

se $m = n$ ovvio $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$

se $m < n$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \underset{\substack{\text{poiché} \\ \{a_n\} \text{ è crescente}}}{<} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

OK.

se $m > n$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

poiché $\{b_n\}$ è decr.

Ne segue che

$$2 = a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 = 2^2 = 4$$

$\Rightarrow$ $\{a_n\}$ è superiormente limitata da 4 $\Rightarrow$ converge a un limite e $\{b_n\}$ è inf. limitata da 2 $\Rightarrow$ converge e il limite di $\{b_n\} = \{a_n\}\{1+\frac{1}{n}\}$

è $e \cdot 1$, cioè $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$

convergono allo stesso limite e.

Circa il fatto che

$$2 < e < 3$$

vedi volta prec. (per $n=5$

ho $b_5 < 3$ e si deve avere

$$a_1 < e < b_5\ )$$

C.V.D.

Storia "finanziaria" di e.

Se investo un capitale K a un tasso annuo di $t\%$ a fine anno il capitale è $\left(1+\frac{t}{100}\right)K$.

Se investo (a interesse composto) su base una frazione n-esima di anno ($n=12$, $n=365$ ecc.), il tasso su frazione di anno diventa $\frac{t}{100\,n}$ e il capitale, a ogni frazione n-esima di anno, passa da c a $c \cdot \left(1+\frac{t}{100n}\right)$.

Quindi nell'arco dell'anno il capitale passa da K a

$$\left(1+\frac{t}{100n}\right)^n \cdot K$$

e $\left(1+\frac{t}{100n}\right)^n \longrightarrow e^{t/100}$ ... che per tassi bassi non è molto diverso da $1+\frac{t}{100}$.

Ad es. se $t=1$, $e^{1/100}$ è moltoprossimo a $1+\frac{1}{100}$

(VEDI il successivo discorso su $e^{b_n} = 1+b_n+o(b_n)$)

(1) Per ogni successione $\{a_n\}$ che sia divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$) risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

con verso specificato 0^+ oppure 0^-

(2) Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^{1/b_n}=e \qquad \left(b_n=\frac{1}{a_n}\right)$$

(3) Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1$$

$\ln = \log_e$

$\ln(1+b_n)\sim b_n$ se $\{b_n\}\to 0$

APPLICO IL LOG in base e alla succes. (2)

(4) Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{b_n}-1}{b_n}=1$$

$e^{b_n}-1\sim b_n$ se $\{b_n\}\to 0$

(5) Per ogni succ. $\{b_n\}\to 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+b_n)^t-1}{b_n}=t \qquad (\forall t\in\mathbb{R})$$

se $\{b_n\}\to 0$: $\forall t\neq 0$ $(1+b_n)^t-1\sim t\,b_n$

LIMITI NOTEVOLI

$\operatorname{sen} b_n\sim b_n$

DEF Dico che due succ. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono ASINTOTICHE (per $n\to+\infty$) se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

ASINTOTICI

$$\left\{ tg \frac{1}{n} \right\} \sim \left\{ \frac{1}{n} \right\} \; ?$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{tg(1/n)}{1/n} \overset{?}{=} 1$$

$$tg\, x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/n}{(\cos 1/n) \cdot 1/n} = \frac{1}{1}$$

Sì in generale se $\{b_n\} \to 0^+$, $\to 0^-$

posso dire che

$$\{tg\, b_n\} \sim \{b_n\}$$

3s.6 (a) | USO DEGLI ASINTOTICI

ES1.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = +\infty \cdot \ln(1+0^+)$$

$[\infty \cdot 0]$ F. I.

1ª VIA LIMITI NOTEVOLI

$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}}}_{\to 1} \cdot \frac{2}{n} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0, \text{ poiché } n = (\sqrt{n})^2$$

2ª VIA: ASINTOTICI. Sostituisco a $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ il suo asintotico $\frac{2}{n}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{2}{n} = 0.$$

ES. 2

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n^2)}{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2} \quad ; \quad \ln\left(1+\frac{3}{n}\right) \sim \frac{3}{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1/n^2}{3/n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3n} = 0.$$

GLI ASINTOTICI SI POSSONO USARE SOLO con prodotti e rapporti, NON con le somme.

Dire che $\{a_n\}$ per $n \to +\infty$ è "o piccolo" di $\{b_n\}$ - Scrivo

$$a_n = o(b_n) -$$

significa che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Succede che

Se $\{c_n\} \sim \{b_n\}$, cioè se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{b_n} = 1$$

allora $c_n - b_n = o(b_n)$, cioè $c_n = b_n + o(b_n)$.

Infatti $\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n - b_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{c_n}{b_n} - 1\right) = 0.$

Vale ovviamente anche il viceversa.

Allora se $\{b_n\} \to 0$

da $\{\sin b_n\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(1) $$\sin b_n = b_n + o(b_n)$$

da $\{\tan b_n\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(2) $$\tan b_n = b_n + o(b_n)$$

da $\{\ln(1+b_n)\} \sim \{b_n\}$ ricavo

(3) $$\ln(1+b_n) = b_n + o(b_n)$$

da $\{e^{b_n} - 1\} \sim \{b_n\}$ ricavo

$$e^{b_n} = 1 + b_n + o(b_n)$$

da $\{(1+b_n)^t - 1\} \sim \{t b_n\}$ ricavo

$$(1+b_n)^t = 1 + t b_n + o(b_n)$$

ATTENZIONE. È ovvio che, anche se b_n è piccolo, $\sin b_n \neq \tan b_n$, $\sin b_n \neq \ln(1+b_n)$ ecc.

(1), (2), (3) dicono solo che in tutti e 3 i casi si può approssimare con b_n e quel che avanza "è trascurabile rispetto a b_n". Ma $o(b_n)$ non è il valore di una funzione: assume significati diversi!

ATTENZIONE AGLI ERRORI CHE NASCONO QUANDO $\{c_n\} \sim \{b_n\}$ e si sostituisce nella successione

$$c_n = b_n$$

invece di $\quad c_n = b_n + o(b_n)$

ESEMPIO:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+4n} - n =$$

è chiaro che $\{\sqrt{n^2+4n}\} \sim \{n\}$

Infatti

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n^2+4n}}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|n| \cdot \sqrt{1+\frac{4}{n}}}{n} =$$

$$\overset{\boxed{n>0}}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n} \cdot \sqrt{1+\frac{4}{n}} = 1$$

cioè $\sqrt{n^2+4n} = n + o(n)$.

Ma non è vero che posso sostituire nella differenza $\sqrt{n^2+4n} = n$.

Se lo faccio trovo che il limite è ZERO

Invece so solo che $\sqrt{n^2+4n} - n = o(n)$ ... e potrebbe anche divergere!

Di fatto:

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+4n-(n)^2}{\sqrt{n^2+4n}+n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\cancel{1}} = \lim \frac{4}{1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}} =$$

$$= 2$$

Qualche volta però si può semplificare questa procedura

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^3+n} - n = [\infty - \infty]$$

Si risolve a occhio perché?

$\sqrt{n^3+n} \sim \sqrt{n^3}$ infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+n}}{\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^3+n}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

e si ha che $\sqrt{n^3}$ tende a $+\infty$ più velocemente di n cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n} = +\infty$$

e di conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^3} - n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^3} \underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^3}}}_{\to 0}\right)}_{\to 1} = +\infty$$

o, in termini di "o piccolo",

$$\sqrt{n^3+n} = \sqrt{n^3} + o(n^{3/2}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{n^3+n} - n = \left(n^{3/2} - n + o(n^{3/2})\right) = n^{3/2}\Big(1 \underbrace{- \frac{1}{n^{1/2}} + o(1)}_{\to 0}\Big)$$

e quindi la succ. si comporta come $n^{3/2}$.

Confronti di infiniti e di infinitesimi

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: dico che $\{a_n\}$ è un infinitesimo

$\left.\begin{array}{l} = +\infty \\ = -\infty \end{array}\right]$ dico che $\{a_n\}$ è un infinito

$\sqrt{\ }$ con $c>1$ (o anche $0<c<1$: tende a $-\infty$)

Esempi: $\{\log_c n\}$, $\{\sqrt{n}\}$, $\{n^3\}$, $\{3^n\}$, $\{n!\}$
sono infiniti.

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infiniti e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ infinito di ordine inferiore risp. } \{b_n\} \\ \ell \text{ finito} \neq 0 & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ hanno = ordine di infinito} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è infinito di ordine sup. risp. a } \{b_n\} \\ \text{non esiste} & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ SONO NON CONFRONTABILI} \end{cases}$$

Se sono infinitesimi la terminologia si ribalta.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 : & a_n \text{ è infinitesimo di ordine superiore a } b_n \\ \ell : & a_n \text{ e } b_n \text{ sono infinitesimi dello STESSO ordine} \\ \pm\infty : & a_n \text{ è infinitesimo di ordine INFERIORE a } b_n \\ \text{non esiste} : & \text{i due infinitesimi non sono confrontabili} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \sin n \quad (\to 0)$$

$$b_n = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n}} \sin n}{\cancel{\frac{1}{n}}} \text{ non esiste.}$$

non sono confrontabili!

Torniamo alle differenze di radicali divergenti a $+\infty$.

se uno dei due ha ordine di infinito superiore non c'è problema!

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+4} - \sqrt{n^2+2} =$$

$\sqrt{n}$ è l'infinito di ordine inferiore a $\sqrt{n^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\sqrt{n^2+2}\Big(\underbrace{1 - \underbrace{\sqrt{\frac{n+4}{n^2+2}}}_{\to 0}}_{\to 1}\Big) = -\infty$$

Amplio il discorso di confronto potenze

Confronto di INFINITI e di INFINITESIMI. Di

① **Due potenze** con base $\{a_n\} \to +\infty$ ed esponenti $b, c > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^b}{a_n^c} = \lim_{n\to+\infty} (a_n)^{b-c} \begin{cases} \text{se } b<c : 0 \\ \text{se } b=c : 1 \\ \text{se } b>c : +\infty \end{cases}$$

È un confronto di INFINITI

E se fosse $b<0$ e $c<0$?

sarebbe un confronto di infinitesimi ....

② **Due esponenziali con base $b, c > 1$** ed esponente $\{a_n\} \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}}{c^{a_n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{c}\right)^{a_n} = \begin{cases} \text{se } b<c : 0 \\ \text{se } b=c : 1 \\ \text{se } b>c : +\infty \end{cases}$$

È un confronto di INFINITI. Se fosse $b, c \in (0,1)$ sarebbe un confronto di infinitesimi.

Se poi $\{a_n\} \to -\infty$ ... si ribalta tutto. ATTENZIONE!!!

③ **Due esponenziali con ugual base** $a > 1$ ed esponenti $\{b_n\} \to +\infty$ e $\{c_n\} \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{b_n}}{a^{c_n}} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n - c_n} = \begin{cases} \text{se } \{b_n - c_n\} \to +\infty : +\infty \\ \text{se } \{b_n - c_n\} \to \ell \text{ finito} : a^\ell \\ \text{se } \{b_n - c_n\} \to -\infty : 0^+ \end{cases}$$

È un confronto di INFINITI

Se invece $\{b_n\} \to -\infty$ e $\{c_n\} \to -\infty$ abbiamo un confronto di infinitesimi, da trattare similmente.

④ **Due logaritmi con ugual argomento** $\{a_n\} \to +\infty$ e basi $b, c \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b a_n}{\log_c a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b c \cdot \cancel{\log_c a_n}}{\cancel{\log_c a_n}} = \log_b c$$

È un confronto di infiniti: e TUTTI hanno lo stesso ordine di grandezza.

ancora due parole sulla differenza di radicali divergenti

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n^2 - n} - n$$

provate a razionalizzare e calcolare il limite - MA

$$\sqrt{2n^2 - n} \sim \sqrt{2n^2} \quad \text{perché}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n^2-n}}{\sqrt{2n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{2n^2-n}{2n^2}} = 1$$

Allora

$$\sqrt{2n^2 - n} = \sqrt{2n^2} + o(\sqrt{2n^2}) =$$
$$= \sqrt{2n^2} + o(n)$$

Sostituisco

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n^2} + o(n) - n =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2}\, n - n + o(n) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{2} - 1) n \underbrace{+ o(n)}_{\text{si trascura}} = +\infty$$