Confronti di infiniti e di infinitesimi

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: dico che $\{a_n\}$ è un infinitesimo

$= +\infty$, $= -\infty$ — dico che $\{a_n\}$ è un infinito

Esempi: $\{\log_c n\}$ con $c>1$ (o anche $0<c<1$: tende a $-\infty$), $\{\sqrt{n}\}$, $\{n^3\}$, $\{3^n\}$, $\{n!\}$ sono infiniti.

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infiniti e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ infinito di ordine inferiore risp. } \{b_n\} \\ \ell \text{ finito} \neq 0 & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ hanno = ordine di infinito} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è infinito di ordine sup. risp. a } \{b_n\} \\ \text{non esiste} & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ SONO NON CONFRONTABILI} \end{cases}$$

Se sono infinitesimi la terminologia si ribalta.

In particolare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_c n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall c>1 \text{ e } \forall \alpha>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{c^n} = 0 \qquad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!} = 0 \qquad \forall c>1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

Gli ultimi confronti si basano sul TEOREMA (CRITERIO del RAPPORTO)

se $a_n \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

① $a_n = \dfrac{\log_c n}{n^\alpha}$ $\quad c > 1$, $\alpha > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log_c (n+1)}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{\log_c n} =$$

$$= \frac{\log_c (n+1)}{\log_c n} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha}$$

$\to 1 \qquad \to 1$

$\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ esiste una $\exists$

è $= 1$ e non < 1

Quindi non posso applicare il criterio!

Si usa una strada di questo tipo

① $\{n^{1/n}\} \to 1$ (teor del confronto)

② $\left\{\frac{1}{n} \log_c n\right\} \to \log_c 1 = 0$

③ Con qualche altro passaggio si prova $\left\{\dfrac{\log_c n}{n^\alpha}\right\} \to 0$

② $a_n = \dfrac{n^\alpha}{c^n}$ $\alpha > 0$ $c > 1$

per mostrare che tende a zero
considero

$$\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \left\{ \frac{(n+1)^\alpha}{c^{n+1}} \cdot \frac{c^n}{n^\alpha} \right\} =$$

$$= \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{c} \right\} \longrightarrow 1^\alpha \cdot \frac{1}{c} =$$

$$= \frac{1}{c} < 1$$

criterio del rapporto
$\Longrightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$

---

③ $a_n = \dfrac{c^n}{n!}$

$$\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \left\{ \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{c^n} \right\} =$$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$= \left\{ c \cdot \frac{1}{n+1} \right\} \longrightarrow c \cdot 0 = 0 < 1$$

criterio del rapp.
$\Longrightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

④

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{e^{n \ln n}}$$

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\cancel{(n+1)} \cdot n^n}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}}\right\} = \left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right\} \to \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{e} < 1 \quad \underset{\text{crit. rapporto}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

VEDERE LA GENERALIZZAZIONE a succ. divergenti diverse da $\{n\}$ per i limiti ① e ②, contenuta nell'ultima slide (limiti notevoli) sui limiti di successioni

Confronto di infiniti. ESERCIZI.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\,\left(1+n^{1/6-1/3}\right)}{\sqrt{n}} =$$

$n^{1/6-1/3} = \frac{1}{n^{1/6}} \downarrow 0$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{1/3-1/2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1/6}} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2}{e^{n/2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{!}{=}$$

$\boxed{n^2 = o(n^3)}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{e^{n/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8\left(\frac{n}{2}\right)^3}{e^{n/2}} =$$

$$= 8\cdot 0 = 0$$

$\left\{\frac{a_n^3}{e^{a_n}}\right\} \to 0$ se $\{a_n\} \to +\infty$

ATTENZIONE: non sempre una potenza è ∞ di ordine inferiore a un'esponenziale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{e^{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\log_{10} n)^5 - 5(\ln n)^4}{\sqrt[10]{n-1} - 20} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(\log_{10} n)^5 - 5(\ln 10 \cdot \log_{10} n)^4}{\sqrt[10]{n}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(\log_{10} n)^5 \left(1 - \frac{5(\ln 10)^4}{\log_{10} n}\right)}{\sqrt[10]{n}} =$$

$\to 0$

$\to 1$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(\log_{10} n)^5}{\left((n^{1/10})^{1/5}\right)^5} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\log_{10} n}{n^{\frac{1}{50}}}\right)^5 = 0^5 = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{n/2}}{n!} \overset{?}{=}$$ Metodo del rapporto

$$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n/2}}\right\} = \left\{\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-1}}{n^{n/2}}\right\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2} \cdot \frac{1}{(n+1)^{1/2}}\right\} \longrightarrow e^{1/2} \cdot 0 = 0 < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n} = [1^\infty]$$

limite di Nepero?

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{1}{n}\cdot\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\ln n} = [1^\infty]$$

oppure, rileggendo:

$$\lim_{n\to+\infty} (n-1)^{\frac{\ln n}{n}} = [\infty^0]$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ln(n-1)\cdot\frac{\ln n}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{(\ln n)^2}{n}} = e^0 = 1$$

perché $\forall \beta>0$ e $\forall \alpha>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

A CASA:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n\ln n}{n^2+1}\right)^{n}$$

$[R: +\infty]$

ESERCIZI

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n= \qquad [R:0]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\cdot\frac{1}{n}= \qquad [R:0]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^n= \qquad [R:e^2]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right)^{n^2}= \qquad [R:0]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-2}{n^3-n+2}\right)^{n^3}= \qquad [R:+\infty]$$

ATTENZIONE: il limite non dipende dal confronto tra il grado del numeratore (e del denominatore) e il grado dell'esponente!

$$\lim_{n\to\infty} n\left(5^{(n+1)/(n^2+1)}-1\right)= \qquad [R:\ln 5]$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}}-1\right)= \qquad [R:-2/3]$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{n^2-1}\right)^n =$$ [R: 0]

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n^2}$$ [R: $+\infty$]

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^n$$ [R: $e^{1/2}$]

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}\right)^n$$ [R : 0]

ATTENZIONE: le ultime due successioni "sembrano" quasi uguali, ma una piccola differenza sul denominatore ha effetti catastrofici

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 \log \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)$$ [R: $+\infty$]

ESERCIZI DA TEMI D'ESAME

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2-3n^3)}{n^3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2/3} - (n-1)e^{1/n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-n}+\sqrt{n}+(\ln n)^4}{n^3-2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)^{n^2+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^{4/3}-2^{2n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-n}-n^{5/4}}{2^{-3n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2-n}-\sqrt{2n^2+7}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-n\ln(1+n)}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2-5n}-2n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\ln\left(\sqrt{n+9n^2}\right)-\ln n\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\ln(1+n^2)+e^{-2n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+e^{-2n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}$$

Quadro riassuntivo sulle potenze

SUCCESSIONE POTENZA DI 2 ASSEGNATE:

$\{a_n\}$ (base: $a_n > 0 \ \forall n$) $\{b_n\}$ (esponente)

a_n	b_n	$a_n^{b_n}$	
cost. $= a$ $\begin{cases} >1 \\ =1 \\ 0<a<1 \end{cases}$	$\to +\infty$	$\to +\infty$ $\to 1$ $\to 0+$	base costante
cost $= a$ $\begin{cases} >1 \\ =1 \\ 0<a<1 \end{cases}$	$\to -\infty$	$\to 0+$ $\to 1$ $\to +\infty$	base costante
cost $= a > 0$	$\to b$	$\to a^b$	base costante
$\to 1$	$\lvert b_n \rvert < C$	$\to 1$	base variabile
$\to a > 0$	$\to b$	$\to a^b$	base variabile
$\to a$ $\begin{cases} >1 \\ 0<a<1 \end{cases}$ MANCA $a_n \to 1$	$\begin{cases} \to -\infty \\ \to +\infty \end{cases}$ $\begin{cases} \to +\infty \\ \to -\infty \end{cases}$	$\to 0+$ $\to +\infty$ $\to 0+$ $\to +\infty$	base variabile
$\to 0+$	$\to b$ $\begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$ MANCA $b_n \to 0$	$\to 0+$ $\to +\infty$	base variabile
$\to +\infty$	$\to b$ $\begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$ MANCA $b_n \to 0$	$\to +\infty$ $\to 0+$	base variabile

Forme di indecisione 1^{∞}, 0^0, ∞^0

Limiti notevoli

Per ogni $\{a_n\} \to 0$ allorché $n \to +\infty$:

0) $\{\operatorname{sen} a_n\} \to 0$; $\{\cos a_n\} \to 1$; $\{\operatorname{tg} a_n\} \to 0$

1) $\left\{\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n}\right\} \to 1 \implies \operatorname{sen} a_n \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

2) $\left\{(1+a_n)^{1/a_n}\right\} \to e$ NEPERO

3) $\left\{\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}\right\} \to 1 \implies \ln(1+a_n) \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

4) $\left\{\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right\} \to 1 \implies e^{a_n}-1 \sim a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

5) $\left\{\frac{(1+a_n)^t-1}{a_n}\right\} \to t \implies (1+a_n)^t - 1 \sim t a_n$ se $\{a_n\} \to 0$

Per ogni $\{a_n\} \to +\infty$ allorché $n \to +\infty$

1) $\left\{\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\} \to e$ ← (VALIDO ANCHE SE $\{a_n\}$ DIVERGE A $-\infty$)

2) $\left\{\frac{\ln(a_n)}{a_n^\beta}\right\} \to 0 \quad \forall \beta > 0$

3) $\left\{\frac{a_n^\beta}{e^{a_n}}\right\} \to 0 \quad \forall \beta > 0$

- Possibilità di ricavare limiti analoghi con basi $c > 1$ ....
- Ricordare le regole algebriche di calcolo e le regole sulle succ. del tipo $\{\ln(a_n)\}$
- Applicare a $\{a_n^{b_n}\}$ → $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$

LIMITI DI FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Siano: (a,b) un qualunque intervallo (anche illimitato: $a=-\infty$ e/o $b=+\infty$);

- $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funz. reale di variab. reale;
- $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$;
- $c \in (a,b)$ oppure $c=a$ (event. $a=-\infty$) oppure $c=b$ (event. $b=+\infty$)

cioè c non necessariamente appartiene all'I.D. di f, ma ne è un punto di accumulazione.

Allora si dice che

al tendere di x a c la funzione $f(x)$ tende al limite ℓ

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ che tende a x la successione $\{f(x_n)\}$ tende a ℓ

Es. So che per ogni $\{x_n\} \to 0$ si ha $\left\{\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\right\} \to 1$

Quindi
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

ATTENZIONE. Non basta 1 successione:

se $x_n = \pi n$ $\{\operatorname{sen} x_n\} = \{0\} \to 0$

ma
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \text{ non esiste!}$$

Infatti se si prende la successione di termine generale

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$
$$\{\operatorname{sen} x_n\} \longrightarrow 1 \neq 0.$$

La definizione data va bene tanto nel caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$ (diremo che $f(x)$ CONVERGE a ℓ) che nei casi in cui $\ell = +\infty$ oppure $-\infty$ (diremo che $f(x)$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$)

Definizione. dico che $f(x)$ tende a ℓ (finito o infinito) per x che tende a $c \in \mathbb{R}$ dalla destra se

per ogni succ. $\{x_n\} \to c^+$ si ha
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$$

Scrivo: $\lim_{x \to c+} f(x) = \ell$.

Invece $f(x)$ tende a ℓ per x che tende a $c \in \mathbb{R}$ da sinistra se

$\forall \{x_n\} \to c^-$ si ha
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$$

Definizione dico che per $x \to c$ la funz. $f(x)$ tende a $\ell \in \mathbb{R}$ PER ECCESSO (o dal di sopra) se

$\forall \{x_n\} \to c$

si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell^+$ (da destra)

Scrivo $\lim_{x \to c} f(x) = \ell^+$

(duale: per difetto o dal di sotto:

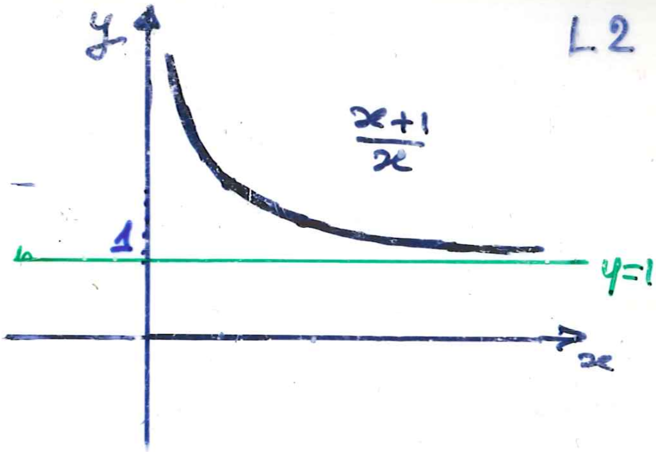
$\forall \{x_n\} \to c$

si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell^-$ (da sinistra)

In questa definizione c può essere eventualmente $+\infty$ o $-\infty$.

Esempi.

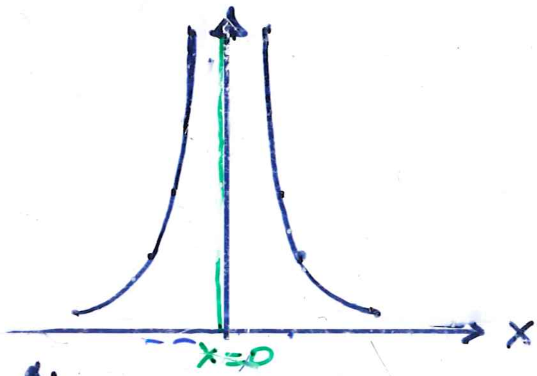
1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$



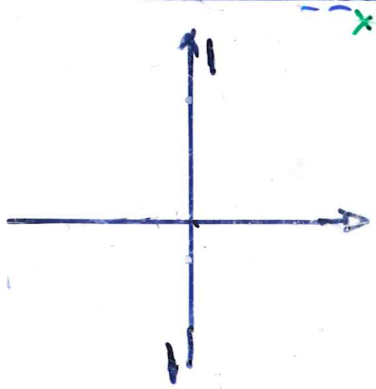
anzi $\frac{x+1}{x}$ tende a 1 dal di sopra

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1^+$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



3. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$



$\{a_n\} \to 0^+$ $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to +\infty$

$\to 0^-$ $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} \to -\infty$

e se $\{a_n\} \to 0$ senza direzione $\lim \frac{1}{a_n}$ non esiste

Limite per x che tende a c (FINITO) da DESTRA (o da SINISTRA) ....

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Limite per eccesso (o per difetto) ....

Asintoti: se il grafico della funzione tende a disporsi come una retta.

per $x \to c$ finito: se $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$ (o ... segni assortiti)

ASINTOTO VERTICALE

per $x \to c$ infinito: se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \neq \pm\infty$: ORIZZONTALE

se $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$: ? OBLIQUO