Risposte agli esercizi proposti ieri e non trattati stamane a lezione

ESERCIZI DA TEMI D'ESAME

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2-3n^3)}{n^3} \qquad [R: 0]$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2/3} - (n-1)e^{1/n} \qquad [R: -\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-n}+\sqrt{n}+(\ln n)^4}{n^3-2^n} \qquad [R: 0]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n+n^2}\right)^{n^2+\sqrt{n}} \qquad [R: e^2]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^{4/3}-2^{2n}} \qquad [R: 0^-]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-n}-n^{5/4}}{2^{-3n}} \qquad [R: -\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2-n} - \sqrt{2n^2+7} \qquad \left[R: -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} - n\ln(1+n)}{n} \qquad [R: -\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2-5n} - 2n \qquad \left[R: -\frac{5}{4}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(\sqrt{n+9n^2}) - \ln n\right) \qquad [R: \ln 3]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\ln(1+n^2)+e^{-2n}\right) \qquad [R: 0]$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+e^{-2n}\right) \qquad [R: +\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2} \qquad [R: e^3]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}\right)} = [1^\infty] = e^{\boxed{-\infty}} = \boxed{0}$$

L'argomento del logaritmo è

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} = 1 + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$$

e quindi il limite dell'esponente è:

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right) =$$

$$\boxed{\text{se } \{b_n\}\to 0 \quad \ln(1+b_n)\sim b_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} + \frac{-1}{\sqrt{n}+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n(\cancel{n}+1-\cancel{n})}{\underbrace{(\sqrt{n}+1)}_{\sqrt{n}}\cdot\underbrace{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}_{2\sqrt{n}}} - \frac{n}{\underbrace{\sqrt{n}+1}_{\sqrt{n}}}\right) = \frac{1}{2}-\infty = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\cdot\ln\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)} = \boxed{1}$$

all'esponente:

$$\lim_{n\to+\infty} n\,\underbrace{\ln\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)}_{\sim\frac{-3}{n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-3n}{n^2-1} = 0$$

Oppure

$$\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{1-n^2}{3}}\right)^{\frac{1-n^2}{3}}}_{\text{limite di nepero}\ \to e}\cdot\frac{3}{1-n^2}\cdot n = e^{\lim\frac{3n}{1-n^2}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \left(\underbrace{\ln(1+n^2)}_{+\infty} - \underbrace{e^{-2n}}_{0} \right) = [0\cdot\infty] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n^2}{n} =$$

$\boxed{=0^+}$, poiché Num. e Den. sono >0

Se invece avessi:

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x}_{-\infty}}}_{0} \left(\ln \underbrace{(1+x^2)}_{+\infty} - \underbrace{e^{2x}}_{0} \right) = [0\cdot\infty] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\ln|x|}{-|x|} = \boxed{0^-}$$, poiché den. è <0

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-n} - n^{5/4}}{2^{-3n}} = \frac{0-\infty}{0^+}$$ non c'è forma di indecisione!

$$\boxed{\frac{1}{0^+} = +\infty} \quad = \quad (-\infty)\cdot(+\infty) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2-3n^3)}{n^3} = \frac{\text{succ. limitata}}{\text{succ. diverg.}} = \boxed{0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(5^{(n+1)/n^3+1}-1\right)=[\infty\cdot 0]=$$

$$\left\{\frac{n+1}{n^3+1}\right\}\to 0 \Rightarrow \left\{5^{(n+1)/n^3+1}\right\}\to 1$$

se $\{b_n\}\to 0$

$e^{b_n}=1+b_n+o(b_n)$

$b_n=\log_e 5\cdot\frac{n+1}{n^3+1}$

$$5^{\frac{n+1}{n^3+1}}=e^{\ln 5\cdot\frac{n+1}{n^3+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n\left(\cancel{1}+\ln 5\cdot\frac{n+1}{n^3+1}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\cancel{1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\ln 5\cdot\frac{n(n+1)}{n^3+1}}_{\downarrow\ 0}+\underbrace{n\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{o\left(\frac{1}{n}\right)\text{ : tende a zero}}=$$

$$=0$$

Oppure mi riconduco a $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{b_n}-1}{b_n}=1$

Riscrivo il limite come

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5^{\frac{n+1}{n^3+1}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\ln 5\,\frac{e^{\ln 5\cdot\frac{n+1}{n^3+1}}-1}{\frac{1}{n}\cdot\ln 5\,\frac{n+1}{n^3+1}\cdot\frac{n^3+1}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln 5}{\frac{n^3+1}{n(n+1)}}=0$$

$\frac{n^3+1}{n(n+1)}\to+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2+1}} - 1\right) = [\infty\cdot 0] =$$

Tra parentesi c'è scritto:

$$\left(\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{1/3} - 1\right) =$$

Ricordo che se $\{b_n\} \to 0$

$$(1+b_n)^t = 1 + t\,b_n + o(b_n)$$

(che viene dal limite notevole

$$\lim_{\substack{b_n\to 0\\ n\to+\infty}} \frac{(1+b_n)^t-1}{b_n} = t \Big)$$

→ provare anche a calcolare il lim. direttamente di qui!

$$= \cancel{1} + \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{n^2+1}\right) - \cancel{1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\cdot\frac{-2}{3(n^2+1)} + n^2\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3} + \lim_{n\to+\infty} \underbrace{o\left(\frac{n^2}{n^2}\right)}_{=\,o(1)} = -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}$$

$= o(1)$ significa che la successione $\{c_n\}$ che dovrei sommare è tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{1} = 0$$

Cioè $\{c_n\} \to 0$

Asintoto obliquo

Può succedere che ci sia solo se si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o: } = -\infty)$$

[oppure

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{o: } = -\infty)]$$

È una retta non parallela a nessuno dei 2 assi

$\Rightarrow$ equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$

e tale che la distanza tra il punto

$P \equiv (x, f(x))$ del grafico di f

e il punto

$Q \equiv (x, mx+q)$ della retta

tenda a 0 quando $x \to +\infty$ [oppure a $-\infty$]

Come lo cerco?

(1) Controllo che sia in esame un limite per $x \to +\infty$ (o $x \to -\infty$)

Se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(2) Controllo che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (o $\lim_{x \to -\infty} f(x)$) sia $+\infty$ oppure $-\infty$

se no: NON DEVO CERCARE l'asintoto obliquo. Altrimenti

(3)(*) Esiste ed è finito e $\neq 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (o $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$) ?

se non esiste o non è finito o è $= 0$: L'ASINTOTO NON C'È.

Altrimenti chiamo **m** questo limite e passo a:

(4) Esiste ed è finito $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$?

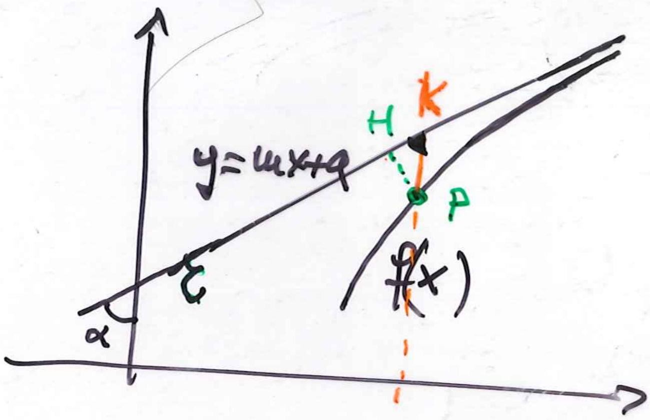
se non esiste o non è finito : L'ASINTOTO NON C'È

Altrimenti chiamo **q** questo limite.

Ho così trovato l'asintoto:

$$y = mx + q.$$

(*) La risposta SÌ a questo punto significa che $f(x)$ ha lo stesso ordine di ∞ di una retta (...cioè ordine 1).



Per definire l'asintoto dovrei chiedere $\{\overline{PH}\} \to 0$

Ma $\overline{PK} = \dfrac{\overline{PH}}{\sin\alpha}$ ove α è la misura dell'angolo tra la retta r e l'asse y.

Basta chiedere $\{\overline{PK}\} \to 0$.

Cioè, se

$$\left.\begin{aligned} P &= (x, f(x)) \\ K &= (x, mx+q) \end{aligned}\right\}$$ voglio che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx+q)\right) = 0$$

$\boxed{\text{CASI IN CUI L'ASINTOTO OBLIQUO NON C'È}}$

$\boxed{\text{Caso 1}}$

$f(x) = \sqrt{x}$

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ è un infinito

Ma:

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$ non hanno lo stesso ordine di ∞

non ci può essere asintoto obliquo

$\boxed{\text{Caso 2}}$

$f(x) = x + \sqrt{x}$

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$ è un infinito

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x} = 1 + 0 = 1$ hanno lo stesso ordine di ∞

SONO ASINTOTICHE per $x \to +\infty$

Ma

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+\sqrt{x}) - 1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

non c'è asintoto! $\Longleftarrow$ non è finito

I.D. $f(x)$ $\quad 4x^2-2x \geq 0$

$x \in (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty)$

$$f(x) = \sqrt{4x^2-2x} - x = [\infty - \infty]$$

ha asintoto per $x \to +\infty$?

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2 + o(x)} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2|x| - x + o(x)\right) =$$

$x \to +\infty$
$\Rightarrow x > 0$
$\Rightarrow |x| = x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x + o(x)\right) = +\infty$$

trascurabile rispetto a x

Ha asintoto obliquo?

(1) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+o(x)}{x} = 1 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}$

$= 1$

$\boxed{m = 1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) - 1\cdot x = \lim_{x\to+\infty} x + o(x) - x =$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty} o(x) \quad ??? =$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-2x} - 2x =$ Razionalizzo

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(4x^2-2x) - (2x)^2}{\sqrt{4x^2-2x} + 2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{2x + o(x) + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{4x} = -\frac{1}{2} = q$$

per $x \to +\infty$
Asintoto ha eq: $y = x - \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 2x} - x$$

Siamo in $(-\infty, 0]$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{ presenta F.I. ? } +\infty + \infty \text{ NO}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2} + o(x) - x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2|x| + o(x) - x}{x} =$$

$x \to -\infty$
$x < 0$
$|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x - x + o(x)}{x} =$$

$$= -3 + 0 = -3$$

Hanno lo stesso ordine di ∞
e $m = -3$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) + 3x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 2x} - x + 3x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\underbrace{\sqrt{4x^2 - 2x}}_{\infty} + \underbrace{2x}_{-\infty} \right) =$$

RAZIONALIZZO

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(4x^2 - 2x) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{-2x + o(x) - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{-4x} = \frac{1}{2}$$

Asintoto per $x \to -\infty$: $y = -3x + \frac{1}{2}$.

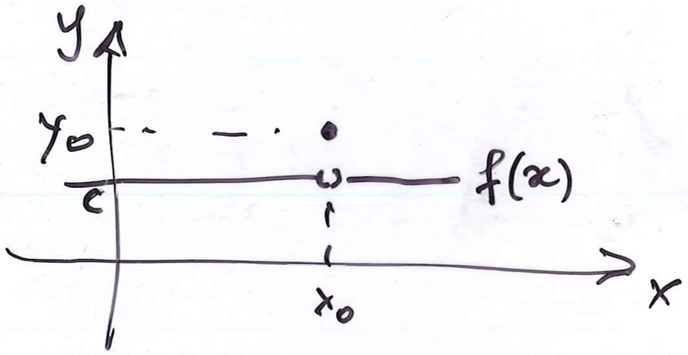
Funzioni continue

Def. Sia $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.
Sia $x_0\in(a,b)$

Dico che $f(x)$ è continua in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esamino la definizione
0°) la funzione è definita in x_0
1°) la funzione ha limite per $x\to x_0$
2°) tale limite è finito
3°) tale limite coincide con il valore di f in x_0

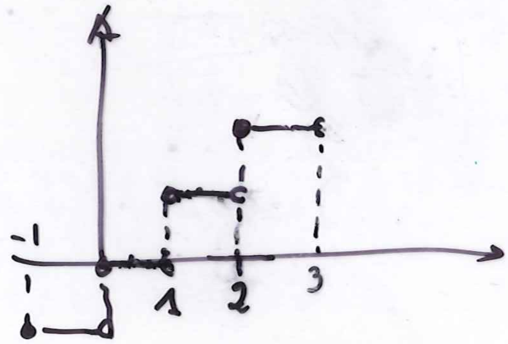


non è continua in x_0 poiché $f(x_0)=y_0$ mentre $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$
$\ell\neq y_0$.

Dato che esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esistono anche $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e sono tutti uguali a $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

In part.(1°) se il $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

non esiste il limite e quindi f(x) non è continua.



$\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ non esiste

$\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$

) diversi!

$\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1 = f(1)$

.... $\lfloor x \rfloor$ è continua da destra in $x=1$.

Infatti:

Dico che $f(x)$ è <u>continua da destra</u> in $x = x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

(analogo da sinistra).

Fin qui si sono esaminate 2 cause di NONCONTINUITA'

•) non vale 3°), cioè il limite esiste finito ma è $\neq f(x_0)$

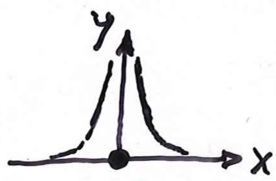
DISCONTINUITA' ELIMINABILE

•) non vale 1°), ma il limite destro e sinistro esistono finiti (eventualmente uno dei due è $= f(x_0)$)

DISCONTINUITA' DI PRIMASPECIE o A SALTO

<u>Altre cause</u>

•) <u>non vale 2°</u> : $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



il limite esiste ma non è finito e quindi è $\neq f(x_0)$.

•) <u>non vale 1°</u> e almeno uno tra limite destro e limite sinistro non esiste

DISCONTINUITA' DI 2ª SPECIE : $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$