CALCOLO dei LIMITI di funzione

INGREDIENTI :
1) OPERAZIONI SUI LIMITI
2) LIMITI FONDAMENTALI (da SUCCESSIONI)
3) TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

1. OPERAZIONI SUI LIMITI

Sia $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ed esistano

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to c} g(x) = \ell'$ (ℓ, ℓ' eventualm infiniti)

(1) $\lim_{x \to c} f(x) \pm g(x) = \ell \pm \ell'$ ... salvo forma di indecisione $\infty - \infty$

(2) $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot \ell'$ ... salvo forma di indecisione $0 \cdot \infty$

(3) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ purchè $g(x) \neq 0$ in tutti i punti di un intorno di c, diversi da c e purchè $\ell' \neq 0$.

ATTENZIONE AL CASO $\dfrac{\ell}{0}$! Se $\lim_{x \to c} g(x) = 0^+$ ... (oppure 0^-)...
Se invece $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ senza verso...

FORME DI INDECISIONE : $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$

LIMITI DI FUNZ. COMPOSTE.

Siano $f : (a,b) \to \mathbb{R}$; $g : (a',b') \to \mathbb{R}$ con $f((a,b)) \subseteq (a',b')$
(a, b, a', b' eventualmente infiniti) e sia f non costante. $^{(\bullet)}$ Se

$\lim_{x \to c} f(x) = c'$ (con $c' \in (a',b')$) e

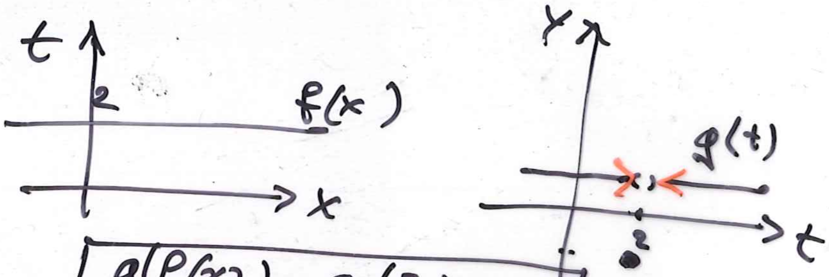
$\lim_{t \to c'} g(t) = \ell$

allora $\lim_{x \to c} g(f(x)) =$

$(\bullet)$ Se $f(x)$ è costante possono succedere brutte cose:

es. $f(x) = 2$, $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 2 \\ -1 & \text{se } t = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow g(f(x)) = -1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} g(f(x)) = -1$.

INVECE $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ e $\lim_{t \to 2} g(t) = 1$



$$\boxed{g(f(x)) = g(2) = -1}$$

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = -1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \qquad \neq$$

$$\lim_{t \to 2} g(t) = 1$$

OSSERVAZIONI che riguardano le FUNZIONI CONTINUE

Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in (a,b)$, allora

$f(x) \pm g(x)$ è cont. in x_0

$f(x) g(x)$ è cont. in x_0

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è cont. in x_0 se $g(x_0) \neq 0$

Se $f(x)$ è cont. in x_0 $\quad (f : (a,b) \to (a',b'))$
$g(t)$ " " " $f(x_0)$ $\quad (g : (a',b') \to \mathbb{R})$

allora

$g(f(x))$ è cont. in x_0

Questo significa che se individuo una collezione di funz. continue in ogni punto di un intervallo di $\mathbb{R}$ (event. $\mathbb{R}$), poi i limiti nei punti di tali intervalli di funzioni ottenute per $\pm$, $\cdot$, $\div$, composiz... si calcolano per sostituzione.

Funzioni certamente continue in ogni punto in cui sono definite. Si dimostra che sono tali tutte le funzioni elementari, cioè:

- funzioni costanti
- x^n $(n \in \mathbb{N})$, x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$
- a^x $(a \in (0,1) \cup (1,+\infty))$
- $\log_a x$ con $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$
- $\operatorname{sen} x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\right)$
- $\operatorname{arcsen} x$; $\arccos x$; $\operatorname{arctg} x$

$[-1, 1]$ è il loro I.D.

da destra

da sinistra

$\sqrt{x}$: I.D. $[0, +\infty)$

conti. da destra

Esempio di calcolo di limite FACILE:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x + 4}{5 + \ln x}$$

al numeratore la funz. è conti. in $x=1$?

sì perché somma di potenze o costanti

al denom. è conti. in $x=1$

sì perché somma di una cost. e di un logaritmo

Si annulla in $x=1$?

$\ln 1 + 5 = 0 + 5 \neq 0 \Rightarrow$ NO

Allora il limite lo calcolo sostituendo $= \frac{1-1+4}{5+0}$

$= 4/5$

INVECE:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x + 4}{\ln x} = \frac{4}{0}$$

il limite non c'è !!

perché $\lim_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$

$\lim_{x \to 1^-} \ln x = 0^-$

2. LIMITI FONDAMENTALI

(A) Sia $f(x)$ una delle funzioni (elementari)

$$x^{\alpha}, \quad a^{x}, \quad \log_a x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos x$$

e sia c un numero appartenente all'I.D. di $f(x)$ (°)

Allora

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0+ & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0+ & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0+ & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^{x} = \begin{cases} 0+ & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$x = -t$, $t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \underbrace{a^{-t}}_{= \left(\frac{1}{a}\right)^t} = \begin{cases} \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ NON ESISTE (idem per $x \to -\infty$ e per $\cos x$)

$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \pi/2$; $\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$

Applicando il teorema sui limiti di funz. composte

Si ha se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$: $\lim_{x \to c} a^{f(x)} = a^{\ell}$, $\lim_{x \to c} \log_a f(x) = \log_a \ell$

(°) Merita attenzione il caso x^{α} con α reale > 0

Il suo ID è $[0, +\infty)$ ma non si può calcolare

$\lim_{x \to 0} x^{\alpha}$ (per $x < 0$ la funzione non è definita). Però

$$\lim_{x \to 0+} x^{\alpha} = 0^{\alpha} = 0.$$

La situazione è più semplice per α intero positivo

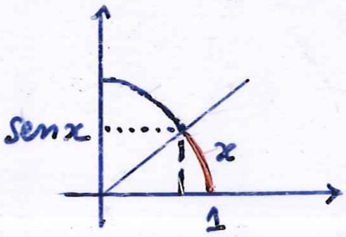
Più in generale, se $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to c} g(x) = e'$

(c, e, e' eventualmente infiniti)

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = \ell^{e'}$$

Forme di indecisione ∞^0, 0^0, 1^∞: evidenziate scrivendo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$
e ricordando la forma di indecisione del prodotto.

(B) • $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



• NEPERO e conseguenze:

$\lim_{x \to +\infty} (1 + 1/x)^x = e = \lim_{x \to -\infty} (1+1/x)^x$

$\lim_{z \to 0^\pm} (1+z)^{1/z} = e = \lim_{z \to 0} (1+z)^{1/z}$

$\lim_{z \to 0^\pm} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1 = \lim_{z \to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^t - 1}{x} = t$ per ogni t reale

• CONFRONTO di INFINITI

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta > 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$ $\forall \alpha > 0$, $\forall a > 1$

• CONFRONTI TRA INFINITI E INFINITESIMI DELLO STESSO TIPO

3. TRASFORMAZIONI SUI LIMITI

(Sottocaso del discorso sul limite di funzioni composte)

È talora utile applicare le seguenti sostituzioni

$\boxed{t=-x}$ oppure $\boxed{t=1/x}$ oppure $\boxed{t=x-a}$

La prima trasforma limiti per $x\to-\infty$ in limiti per $t\to+\infty$; la seconda trasforma limiti per $x\to0+$ in limiti per $t\to+\infty$ e viceversa; la terza trasforma i limiti per $x\to a$ in limiti per $t\to0$

ESEMPI

- $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t} =$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{t=-x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{-t} =$

- $\lim\limits_{x\to\pi/3} \frac{3x-\pi}{\operatorname{sen}(x-\pi/3)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{t=x-\pi/3}{=} \lim\limits_{t\to0} \frac{3t}{\operatorname{sen} t} =$

- $\lim\limits_{x\to0+} x\left(e^{1/x}-1\right) = [0\cdot\infty] \overset{t=1/x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{t}-1\right) =$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t}\left(1-e^{-t}\right) =$

- $\lim\limits_{x\to0-} x\left(e^{1/x}-1\right) \overset{t=-1/x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}\left(e^{-t}-1\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} =$ Qui non c'è indecisione, ma si vede meglio così

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x}+x = [\infty-\infty]$ Si può risolvere direttamente. Oppure: $t=-x$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t^2+2t}-t = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2+2t-t^2}{\sqrt{t^2+2t}+t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t}{|t|+t} =$

$\underset{\substack{t>0 \\ \text{poiché} \\ t\to+\infty}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t}{t+t} =$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = [0 \cdot \infty] \quad ?? =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ t \to +\infty \end{array}}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0^-$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \boxed{\begin{array}{l} x = -t \\ t \to +\infty \end{array}} \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1+t)}{-t} = 0^-$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{3x - \pi}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \boxed{\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = t \\ t \to 0 \end{array}} \quad x = t + \frac{\pi}{3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{3t + \cancel{\pi} - \cancel{\pi}}{\operatorname{sen} t} = 3$$

(o con il limite notevole o osservando che per $t \to 0$ $\operatorname{sen} t \sim t$

ATTENZIONE Non per ogni $t \in \mathbb{R}$ $\operatorname{sen} t \sim t$ ma solo se $t \to 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(e^{1/x}-1\right) \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} = \boxed{\begin{array}{l}\frac{1}{x}=t\\ t\to+\infty\end{array}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t}-1}{t} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\left(e^{1/x}-1\right) = 0\left(e^{\frac{1}{0^-}}-1\right) = 0\left(e^{-\infty}-1\right)$$
$$= 0^-(0-1) = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x}+x = \boxed{\begin{array}{l}x=-t\\ t\to+\infty\end{array}}$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \sqrt{t^2+2t}-t = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2+2t-t^2}{t+t} =$$
$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = 1$$

$\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\cos x \to 1$

$\tan x \sim x$ per $x\to 0$

$\tan x = x + o(x)$ $\boxed{\text{per } x\to 0}$ ove dire che

$\tan x - x = o(x)$ significa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x} = 0$$

$\sin x = x + o(x)$ per $x\to 0$

$e^x = 1 + x + o(x)$ per $x\to 0$

$\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x\to 0$

$(1+x)^t = 1 + tx + o(x)$ per $x\to 0$.

Esercizi

1. Mostrare che

- $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

2. Calcolare:

$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\,\text{sen}\,(1-x)}{(\ln x)^2}$ fatto

$\lim_{x \to 0+} \frac{2x + x^2 \ln x}{\ln(1+x)}$ fatto

$\lim_{x \to 0} \frac{1+2\ln(1-x)}{x^2 - 2e^x}$ $\left[R: -\frac{1}{2}\right]$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) + x}{2(e^x + x)}$ $[R: 0]$

$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(x-1) - 1}{(\ln x)^4}$ $[R: -\infty]$

$\lim_{x \to 3} \frac{\text{tg}\, 2(3-x)}{x-3}$ $[R: -2]$

$\lim_{x \to 1/2} \frac{e^{2x-1} - 1}{2x^2 - x}$ $[R: 2]$

$\lim_{x \to -\infty} x \ln(1+e^x)$ $[R: 0^-]$

$\lim_{x \to -\infty} x(e^{1/x} - 1)$ fatto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

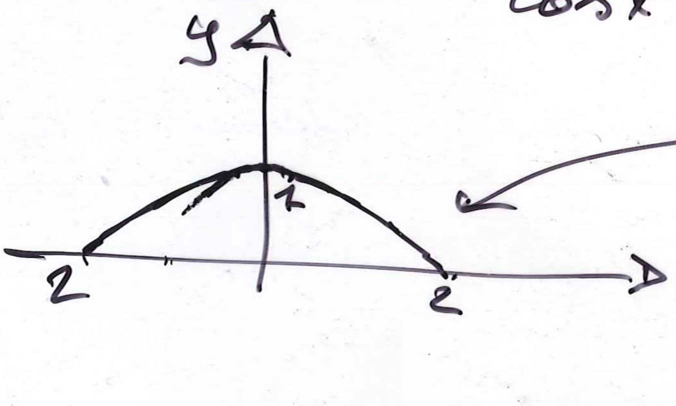
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

per $x \to 0$ $\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

cioè

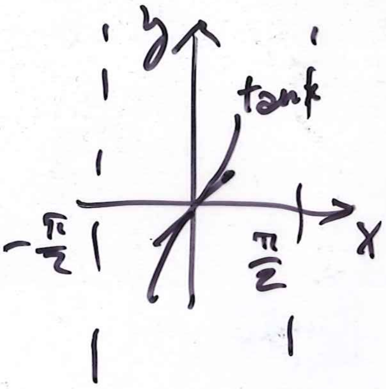
~~per~~ $x \to 0$ $\quad 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

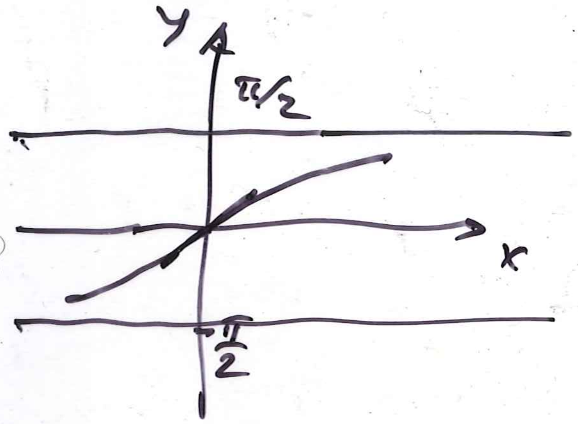
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$



$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$
approssima il grafico di $\cos x$ vicino a $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$





$x = \tan z \quad , \; z \to 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\arctan(\tan z)}{\tan z} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\tan z} = 1$$

$\Rightarrow \quad \arctan x = x + o(x) \quad$ per $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\,\mathrm{sen}(1-x)}{(\ln x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \boxed{\begin{array}{c} x-1=t \\ t\to 0 \end{array}}$$

$x = t+1$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1-1-t)\,\mathrm{sen}(-t)}{(\ln(1+t))^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t\,\mathrm{sen}(-t)}{(\ln(1+t))^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,\mathrm{sen}\,t}{(\ln(1+t))^2} =$$

per $t \to 0$ $\mathrm{sen}\,t \sim t$, $\ln(1+t) \sim t$ e nel limite ci sono solo prodotti e rapporti $\Rightarrow$ posso sostituire gli asintotici

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1.$$

$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x + x^2 \ln x}{\ln(1+x)} \overset{\downarrow}{=} \frac{0 + 0\cdot 0}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

per $x \to 0$ $\ln(1+x) \sim x$ e dato che al den. non ci sono somme posso sost. l'asintotico

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2x + x^2 \ln x}{x} = 2 + \lim_{x\to 0} x \ln x =$$

$$= 2$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = -\infty\left(e^{\frac{1}{-\infty}} - 1\right)$$

$$= -\infty\,(1-1)$$

$$= [\infty \cdot 0]$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \begin{matrix} t = \frac{1}{x} \\ t \to 0^- \end{matrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$