Funzioni continue

Def. Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.

Sia $x_0 \in (a,b)$

Dico che $f(x)$ è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

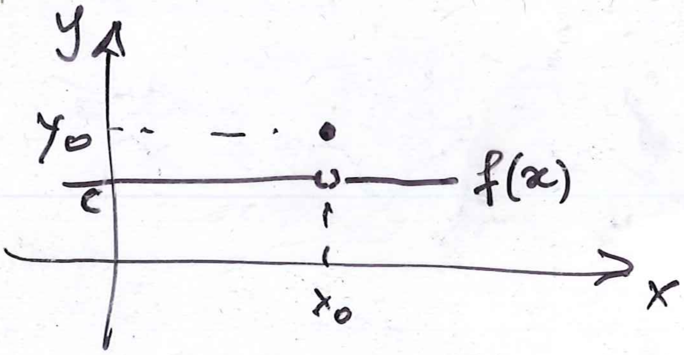
Esamino la definizione

0°) la funzione è definita in x_0

1°) la funzione ha limite per $x \to x_0$

2°) tale limite è finito

3°) tale limite coincide con il valore di f in x_0



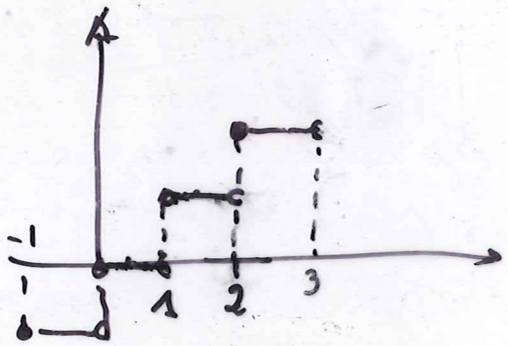
non è continua in x_0 poiché $f(x_0) = y_0$ mentre $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$\ell \neq y_0$.

Dato che esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esistono anche $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e sono tutti uguali a $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

In part. (1°) se il $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

non esiste il limite e quindi $f(x)$ non è continua.



$\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ non esiste

$\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$

) diversi!

$\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1 = f(1)$

.... $\lfloor x \rfloor$ è continua da destra in $x=1$.

Infatti:

Dico che $f(x)$ è <u>continua da destra</u> in $x = x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

(analogo da sinistra).

Fin qui si sono esaminate 2 cause di NONCONTINUITA'

•) non vale 3°), cioè il limite esiste finito ma è $\neq f(x_0)$

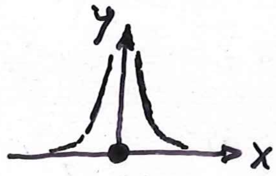
DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

•) non vale 1°), ma il limite destro e sinistro esistono finiti (eventualmente uno dei due è $= f(x_0)$)

DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE O A SALTO

<u>Altre cause</u>

•) <u>non vale 2°</u> : $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



il limite esiste ma non è finito e quindi è $\neq f(x_0)$.

•) <u>non vale 1°</u> e almeno uno tra limite destro e limite sinistro non esiste

DISCONTINUITÀ DI 2^a SPECIE : $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

FUNZIONI CONTINUE (a, b eventualmente ∞)

$f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $c \in (a,b)$ se

$$\lim_{x \to c-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c+} f(x)$$

Significa: A PICCOLE VARIAZIONI di x corrispondono PICCOLE VARIAZIONI di $f(x)$.

Si dice continua da sinistra in $c \in (a,b)$ se

$$\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$$

Es. $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Idem da destra : $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice <u>continua su</u> $[a,b]$ (con a,b finiti)

se f è continua in ogni $c \in (a,b)$
continua da destra in a : $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$
da sinistra in b : $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

Tipi di discontinuità

0) ELIMINABILE . ES. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

1) di prima specie o a salto (modellizzano fenomeni con bruschi salti. ES. $f(x) = [x]$

$\lim_{x \to c-} f(x) \neq \lim_{x \to c+} f(x)$

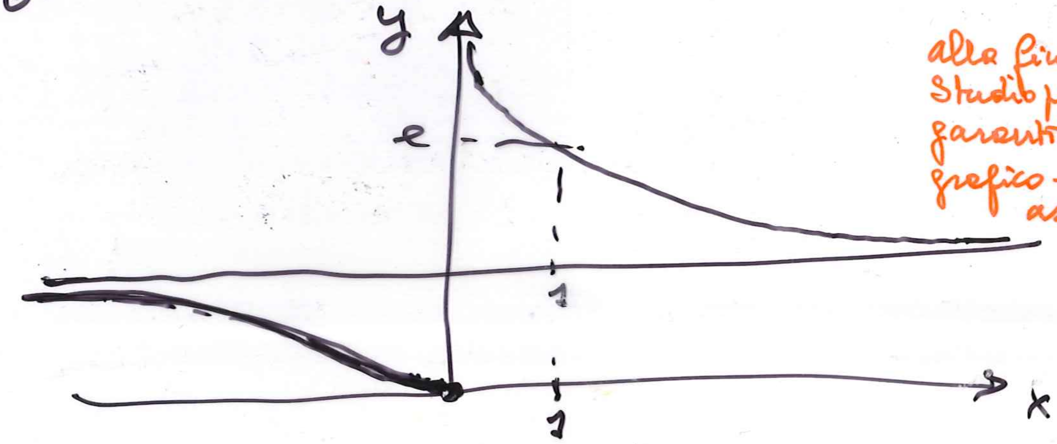
2) di seconda specie Es. $f(x) = \begin{cases} \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

se $\lim_{x \to c+} f(x)$ e/o $\lim_{x \to c-} f(x)$ non esistono o sono uguali a $\pm\infty$ o

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$



alla fine dello studio potremo garantire che il grafico ha questo aspetto

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1^+$$ per $x \to +\infty$ asint. orizz. $y = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^{0^-} = 1^-$$ per $x \to -\infty$ asint. orizz. $y = 1$

in $x = 0$ c'è 1 discontinuità di 1^a specie.

Per quanto riguarda la monotonia in ciascuno dei 2 intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ $f(x)$ è decresc. in quanto composta di $\frac{1}{x}$ (decresc.) e e^t crescente.

Per la concavità/convessità dovremo usare le derivate seconde.

ESERCIZI: in dipendenza da $a \in \mathbb{R}$ si stabilisca se $f(x)$ è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$ L10

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^4} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{a+2}{a^2+1} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\operatorname{Ch} x} - x & \text{se } x < 0 \\[2ex] a & \text{se } x = 0 \\[2ex] \dfrac{3}{2x^2+3x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} \log x}{1-x} & \text{se } 0 < x < 1 \\[2ex] ax - a^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 2(x-1)}{x-1} & x < 1 \\[2ex] 2 & x = 1 \\[2ex] \dfrac{e^{x-1} - 1 + (x-1)^a}{\log x} & x > 1 \end{cases}$$

$$Ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{coseno iperbolico}$$

$$Sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{seno} \quad "$$

parametrizzano almeno il ramo destro dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$

$x = Ch\,t$
$y = Sh\,t$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{Ch\,x} - x & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{3}{2x^2+3x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

È continua in $x=0$?

Sì se succede che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

cioè se

$$a = \lim_{x\to 0^-} \frac{a}{Ch\,x} - x = \lim_{x\to 0^-} \frac{a}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} - x =$$

$$= \frac{a}{2/2} - 0 = a \quad : \text{VERO } \forall a \in \mathbb{R}$$

e

$$a = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2x^2+3x+1} = \frac{3}{1} = 3 \implies a = 3$$

Sì è continua per $a=3$. Altrimenti è solo continua da sinistra.

Proprietà delle funzioni continue

f, g continue in c $\Rightarrow$ $f \pm g$ continua in c
$f \cdot g$ " " "
f/g " " " se $g(c) \neq 0$

$\frac{f}{g}$ non è def. in c.

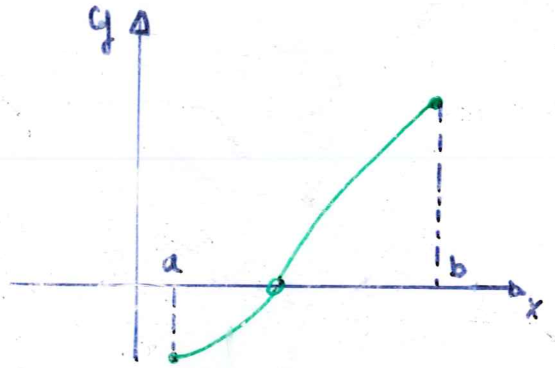
$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } c \\ g \text{ " " } f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ continua in c.

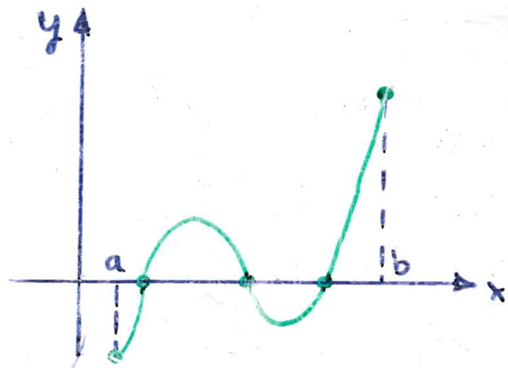
Esempi di funzioni continue (a parte quelle elementari):

- polinomi
- razionali fratte ....
- $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ (con $f(x) > 0$)

Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

TEOREMA degli ZERI. Sia f continua in $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$



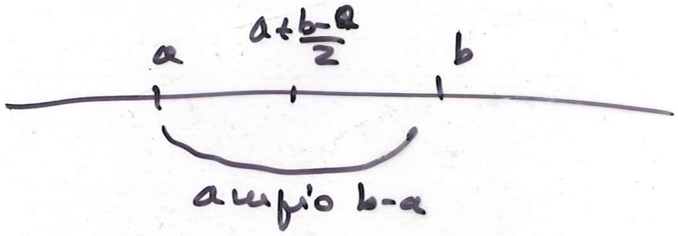


Dim. con il METODO DI BISEZIONE
Consiste nella costruzione di una successione $\{c_n\}$ di punti di (a,b) CONVERGENTE a UNO ZERO di f.

1°) $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c_1) = 0$ STOP;
altrimenti se $f(a)f(c_1) < 0$ pongo $a_1 = a$, $b_1 = c_1$
se $f(b)f(c_1) < 0$ " $a_1 = c_1$, $b_1 = b$

Nozione di PUNTO MEDIO

punto medio tra a e b con $a<b$



$$a+\frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

ESPLICITAZIONE degli ultimi passi del Teorema degli zeri.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \in (a,b)$$

$\boxed{f(x) \text{ è continua in } \ell}$ poiché lo è in ogni punto di (a,b)

cioè:

$$\lim_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$$: che cosa significa?

Significa che $\forall$ successione $\{x_n\} \to \ell$

si ha $\{f(x_n)\} \to f(\ell)$

In particolare se prendo $x_n = a_n$

oppure $x_n = b_n$

(per def. di limite)

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\ell)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\ell)$$

e quindi per le proprietà aritmetiche dei limiti

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) = (f(\ell))^2 \text{ che è } \geq 0$$

ma $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0 \xRightarrow{\text{Teor permanenza segno}}$ il limite deve essere $\leq 0 \Rightarrow (f(\ell))^2 = 0 \Rightarrow \boxed{f(\ell)=0}$. C.V.D.

Riparto dall'intervallo $[a_1, b_1]$, per il quale valgono le ipotesi viste per $[a, b]$. Quindi

2°) $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Se $f(c_2)=0$ STOP;

altrimenti ITERO : $a_2 = \begin{cases} a_1 \text{ se } f(a_1)f(c_2)<0 \\ c_1 \text{ se } f(b_1)f(c_2)<0 \end{cases}$ $b_2 = \begin{cases} b_1 \text{ se } f(b_1)f(c_2)<0 \\ c_2 \text{ se } f(a_1)f(c_2)<0 \end{cases}$

Continuando così si ha una coppia di successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ t.c.

I) $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$: successioni MONOTONE

la prima non decrescente ~~CRESCENTE~~ superiormente limitata da b

la seconda non crescente ~~DECRESCENTE~~ inferiormente limitata da a

II) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

III) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

IV) f è una funz. continua in ogni punto di (a, b)

Da I) si deduce $\{a_n\} \to \ell_1$, $\{b_n\} \to \ell_2$ per $n \to \infty$

Da II) si deduce che $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2 = \ell$

Da IV) " $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\ell) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ PER DEF. di LIMITE

Dettaglio a parte

Da III) e dal teor. della permanenza del segno si deduce

$$f(a_n) \cdot f(b_n) \longrightarrow (f(\ell))^2 \leq 0$$

.... cioè $f(\ell) = 0$, cioè ℓ è lo zero cercato.

Questo è un metodo di calcolo (approssimato) degli zeri : necessita però di una LOCALIZZAZIONE precisa degli zeri. Ed è un metodo lungo.

TEOR. DEGLI ESTREMI (Weierstrass). f continua su $[a, b] \Rightarrow$

i) f limitata su $[a, b]$

ii) f dotata di massimo e di minimo ASSOLUTI in $[a, b]$.

cioè ...

$$P(x) = x^3 - x + 3$$

Questo polinomio ha almeno una radice per due buoni motivi:

1) lo vedo come pol. a coeff. in $\mathbb{C}$ e TEOR. FOND ALGEBRA : $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ possono essere o reali o 2 complesse coniugate e $\boxed{1 \text{ reale}}$

2) $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ per x abbastanza grande in val. ass. e piccolo in val. rel. $P(x) < 0$

$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ per x abbastanza grande $P(x) > 0$

$\exists\, a \in \mathbb{R}: P(a) < 0$
$\exists\, b \in \mathbb{R}: P(b) > 0$ $\xRightarrow{\text{TEOR degli zeri}}$ esiste almeno uno zero.

Come lo trovo?

Assumendo per buono il grafico rosso ($\Rightarrow$ cioè $m+3>0$) calcolo $f(0) = 3 > 0$ e cerco $x_0 < 0$ t.c. $f(x_0) < 0$ ad es. $x_0 = -2$: $f(-2) = \underbrace{-8+2+3}_{=-3}$

Il teor degli zeri dice che lo zero è in $(-2, 0)$

$c_1 = -1$ $\quad f(-1) = -1+1+3 = 3 > 0$

$a_1 = -2$, $b_1 = -1$

$c_2 = -\frac{3}{2}$ $\quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} + \frac{3}{2} + 3 = -\cancel{3} - \frac{3}{8} + \frac{3}{2} \cancel{+3} > 0$

$a_2 = -2 \qquad b_2 = -\frac{3}{2}$

$c_3 = -\frac{7}{4} \qquad f\left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{7^3}{4^3} + \frac{7}{4} + 3$

$= -\frac{49 \cdot 7}{64} + \frac{19}{4} =$

$= \frac{-343 + 19 \cdot 16}{64} =$

$= \frac{-343 + 320 - 16}{64} < 0$

$a_3 = -\frac{7}{4} \qquad b_3 = -\frac{3}{2} \qquad$ ampiezza $\frac{1}{4}$

la successione converge ma molto lentamente.

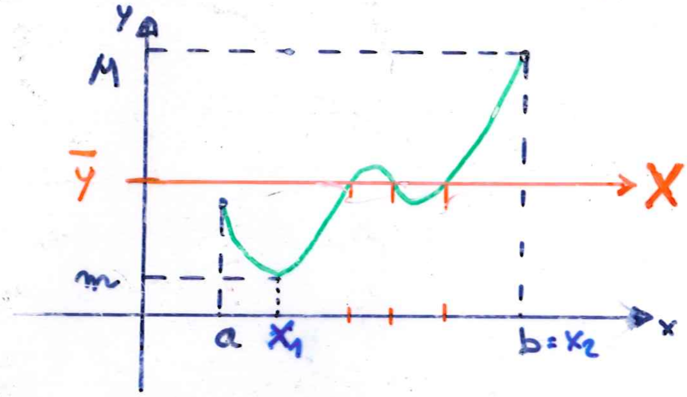
Metodi più convincenti:

quello delle secanti

o quello delle tangenti

TEOR. dei VALORI INTERMEDI. f continua in $[a,b]$

Per ogni valore $\bar{y}$ compreso tra il minimo m e il max M esiste un $\bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$.



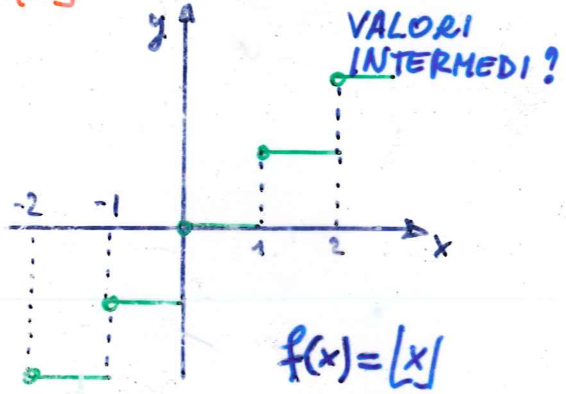
Infatti: se $g(x) = f(x) - \bar{y}$; $m-\bar{y} = g(x_1) < 0$; $M-\bar{y} = g(x_2) > 0$

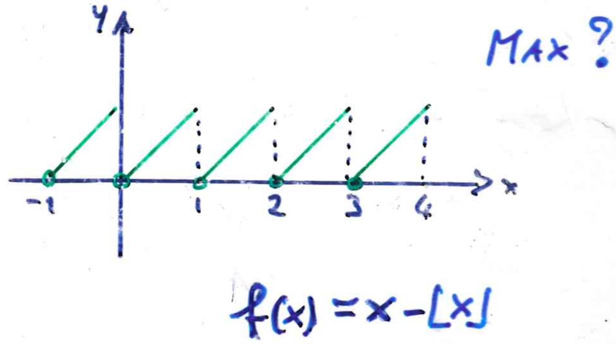
$\Rightarrow g(x_1)g(x_2) < 0$; g è cont. in $[a,b]$ $\Rightarrow$ vale teor. degli zeri $\Rightarrow$

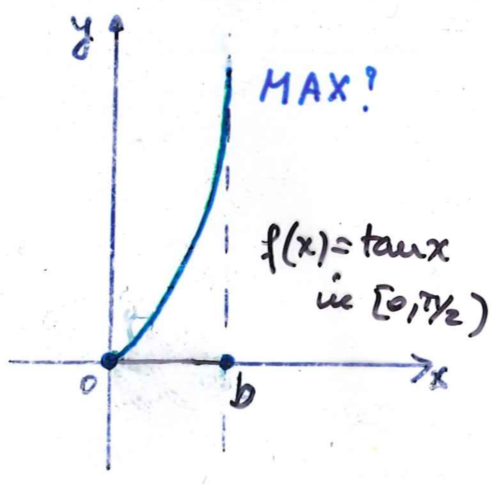
$\Rightarrow \exists$ $\bar{x} \in [a,b]$ t.c. $g(\bar{x}) = 0$ e quindi $f(\bar{x}) = \bar{y}$

Si utilizza per provare il TEOR della MEDIA INTEGRALE.

ATTENZIONE. Questi risultati non valgono in generale per funzioni non continue in almeno un punto di $[a,b]$

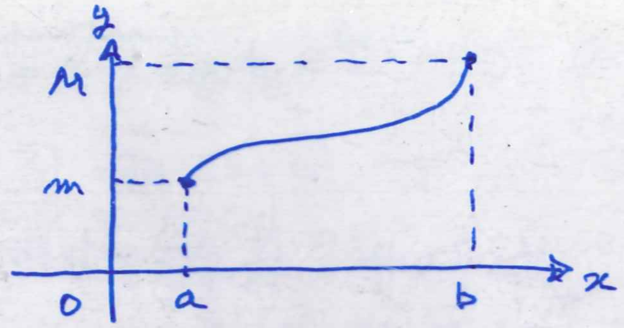






Ma anche cade qualche altra ipotesi:

es. $f(x) = x^2$ def. su $\mathbb{R}$ ....



M è MAX assoluto, ma non ~~MAX~~ MAX RELATIVO

m è min. assoluto, ma non min RELATIVO

Dico che M è MASSIMO ASSOLUTO per la funzione

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R},$$ insieme qualunque, eventualmente intervallo.

se esiste in A un punto x_0 tale che

$$f(x_0) = M$$

e per ogni $x \neq x_0$ in A risulta

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Cioè se M è MASSIMO per l'insieme immagine della funzione.

Similmente MINIMO ASSOLUTO .....

$$\ldots \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Differenza con MAX e min RELATIVI ?

Dico che M è un MASSIMO RELATIVO per la funzione

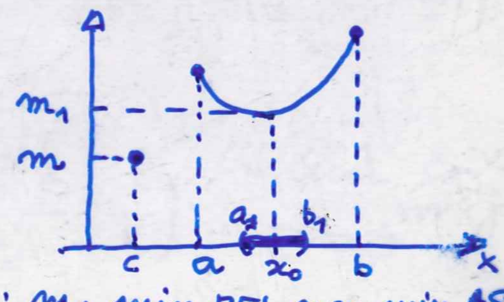
$$f: A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}$$

se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = M$ e <u>esiste un intervallo aperto</u> $(a_1, b_1) \subseteq A$ <u>che contiene</u> x_0 tale che $\forall\, x \in (a_1, b_1)$ si abbia

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Similmente MINIMO RELATIVO ....

$$\ldots \quad f(x) \geq f(x_0)$$



$f: \{c\} \cup (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$; m = minimo ASS. non rel. ; m_1 min REL non min ASS.