TERMINOLOGIA DA RICORDARE:

funzioni :
- LIMITATE Esempi?
- SIMMETRIE ← PARI (o DISPARI) "
- MONOTONIA ← CRESCENTI (o DECRESCENTI) in un INTERV.
- PERIODICHE Esempi?

Stabilire se sono periodiche (e qual è il periodo di):

- $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$
- $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$
- $\cos 3x$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

Delle funzioni precedenti stabilire anche se sono limitate, presentano simmetrie ecc.

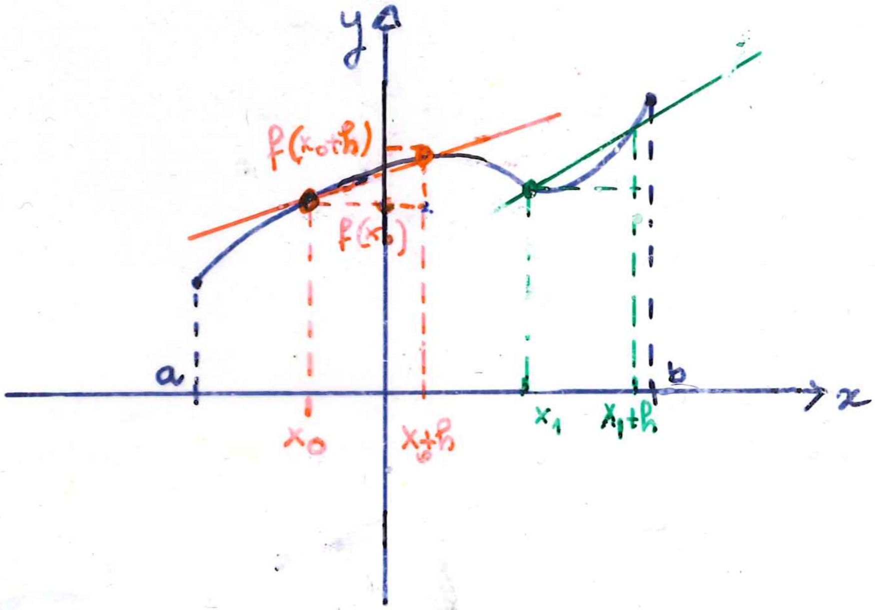
Questi sono studi di funzione "intuitivi".
Per funzioni più complicate? La via di studio non è sempre la stessa, ma sono PUNTI FERMI:

- Trovare il più grande insieme su cui è definita:
  I. D.
- Stabilire il comportamento della funzione negli estremi dell'I.D. (calcolo dei valori o dei limiti negli estremi dell'I.D. con eventuali ASINTOTI)
- Stabilire gli intervalli di monotonia
- Tracciare un grafico.

OPTIONAL: intersezioni con gli assi (se ci sono e si riescono a calcolare); segno; simmetrie, periodicità, concavità.

DERIVATA di una funz. $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$

Problema della VARIAZIONE della variabile dipendente in relazione alla variazione della variabile indipendente



$y = f(x)$

TASSO DI VARIAZIONE MEDIA di $f(x)$ rispetto a x:

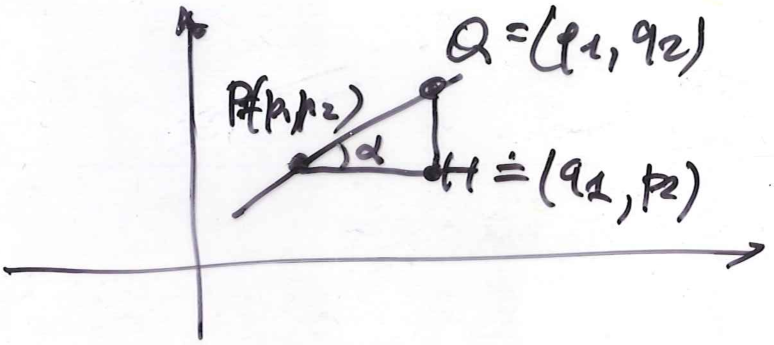
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Viene anche detto RAPPORTO INCREMENTALE

GEOMETRICAMENTE è il coefficiente angolare della retta congiungente $(x_0, f(x_0))$ con $(x_0+h, f(x_0+h))$

Quando h diventa molto piccolo, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ PUÒ RAPPRESENTARE molto bene la pendenza del grafico di $f(x)$ in prossimità di $(x_0, f(x_0))$. PRECISANDO:

se esiste ed è finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ si dice che f è derivabile in x_0 e il limite viene detto derivata di f in x_0 e denotato con $f'(x_0)$.

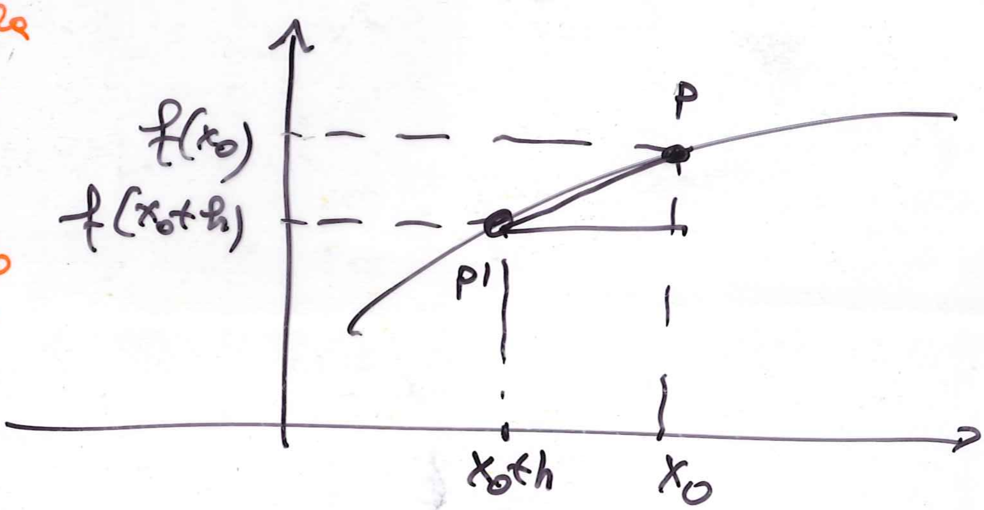


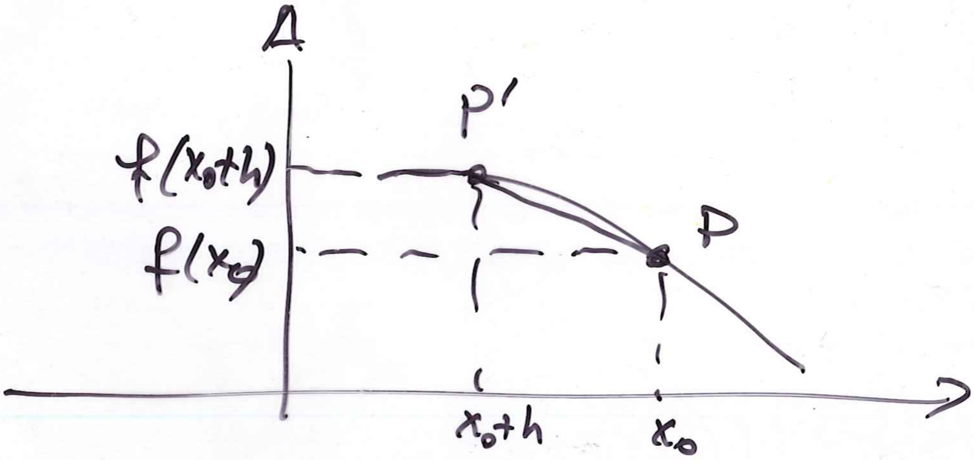
$$\frac{\overrightarrow{HQ}}{\overrightarrow{PH}} = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$$

coeff. ang. della retta per P e Q.

$= \tan \alpha$

Disegno della pagina D1 in altre situazioni (l'incremento h può essere negativo)





finora ho scritto il rapporto incrementale al passaggio da x_0 al punto variato x_0+h:

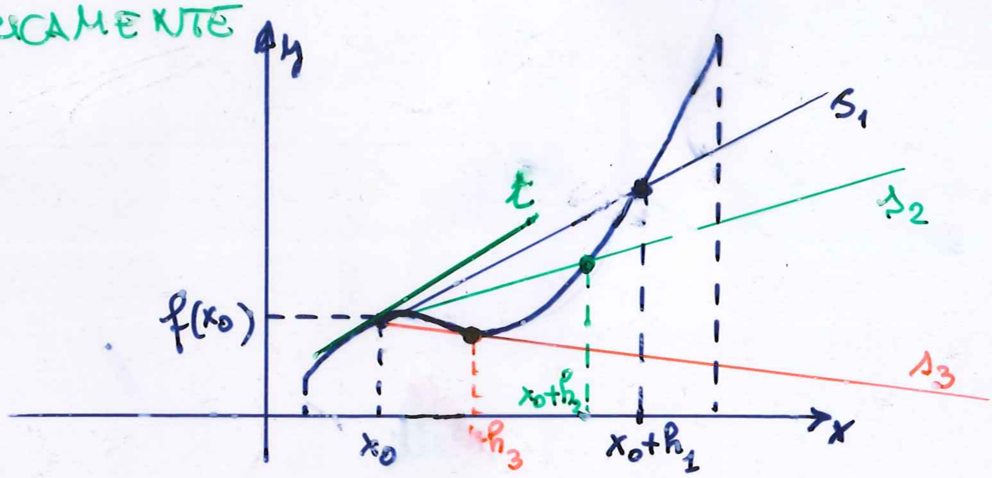
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ma posso altrettanto bene considerare il rapporto incrementale al passaggio da x_0 a x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

: ho solo sostituito $\boxed{x = x_0 + h}$

GEOMETRICAMENTE



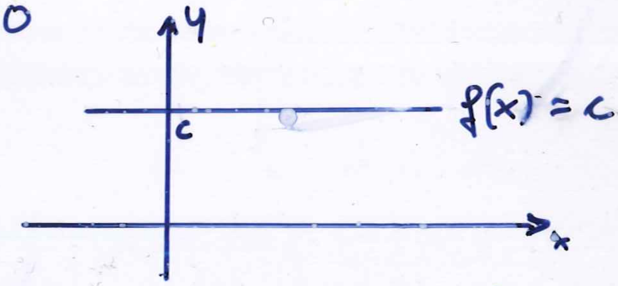
la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta t "TANGENTE" in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di $f(x)$

limite delle secanti passanti per $(x_0, f(x_0))$ e per un altro punto del grafico: sua equazione? VEDI D2.1

ESEMPI.

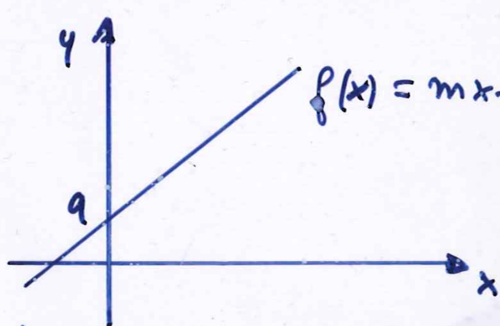
1. $f(x) = c$ ove $c \in \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) = c \\ f(x_0) = c \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0$$



2. $f(x) = mx + q$ $(m, q \in \mathbb{R})$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = m$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) = m(x_0+h)+q \\ f(x_0) = m x_0 + q \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{m h}{h} = m$$



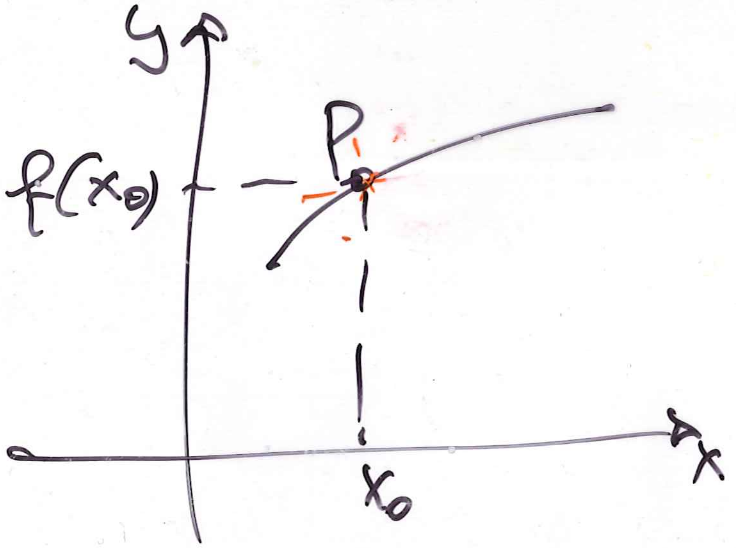
3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$, MA NON in $x_0 = 0$ poiché:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty \quad \text{poiché } \frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}}$$

equazione della retta tangente al grafico della funz. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ in $x_0\in(a,b)$, se esiste la derivata di f in x_0:

È una retta che passa per $P=(x_0,f(x_0))$

$$y-f(x_0)=m\,(x-x_0)$$



(posto in

$$y=mx+q$$

$x=x_0\quad y=f(x_0)$:

$$f(x_0)=mx_0+q$$

faccio la differenza delle 2 eq.

$$y-f(x_0)=mx-mx_0\,)$$

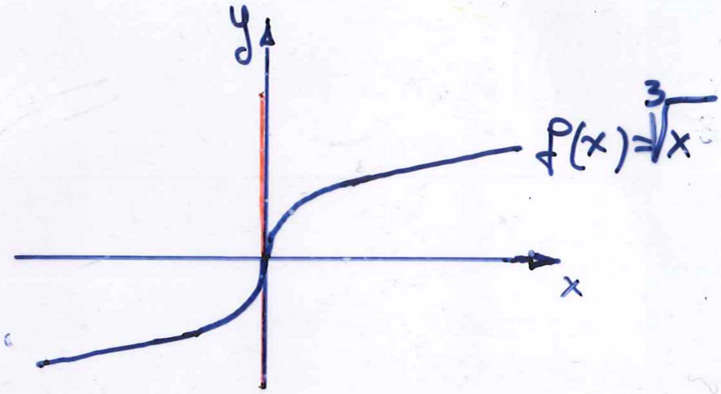
Essendo tangente al grafico: $m=f'(x_0)$

EQ:

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0)}$$

Dato $x=x_0$

calcolo $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ e

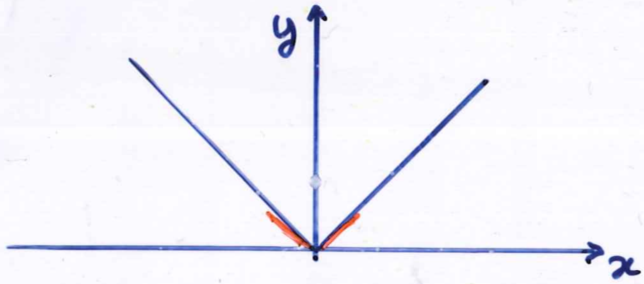


ATTENZIONE: in (0,0) esiste comunque la tangente al grafico: $x=0$

4. $f(x) = |x|$ è derivabile in ogni $x_0 \neq 0$, MA NON in $x_0=0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h>0 \\ -1 & \text{se } h<0 \end{cases}$$

non esiste poichè è ≠ da DS e da SIN



Derivata destra di $f(x)$ in x_0: esiste se esiste finito

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad : \; f'_+(x_0)$$

Idem: derivata sinistra

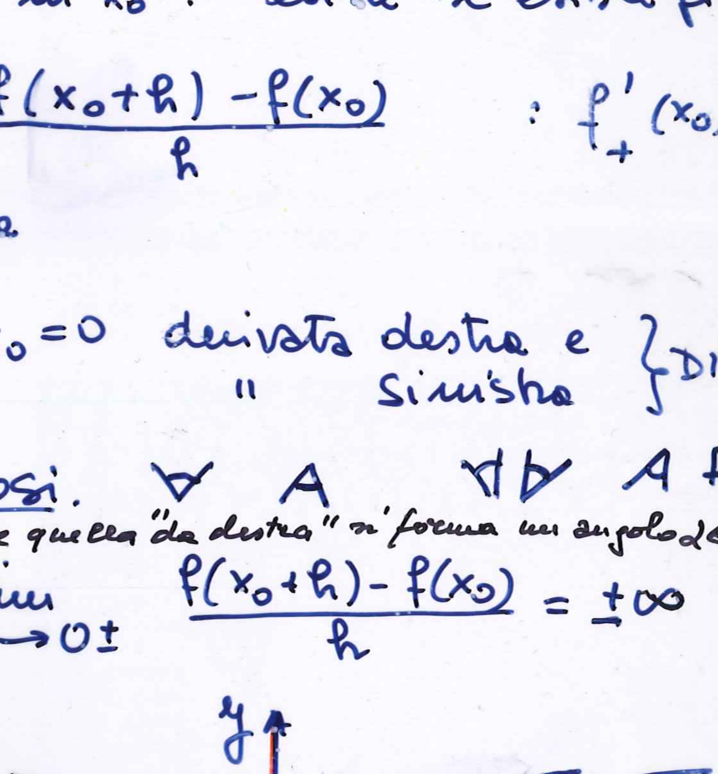
Quindi $|x|$ ha in $x_0=0$ derivata destra e " sinistra } DIVERSE

Parlo di punti angolosi.

Tra la "tangente da sinistra" e quella "da destra" si forma un angolo $\alpha \in (0,\pi)$

Invece cuspidi se $\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ (oppure $\mp\infty$). ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{|x|}$



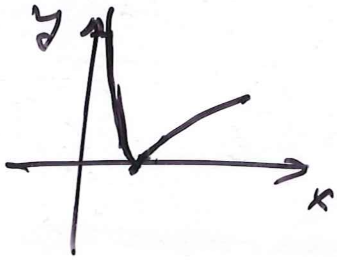
$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|h|}-\sqrt{0}}{h} = \pm\infty$$

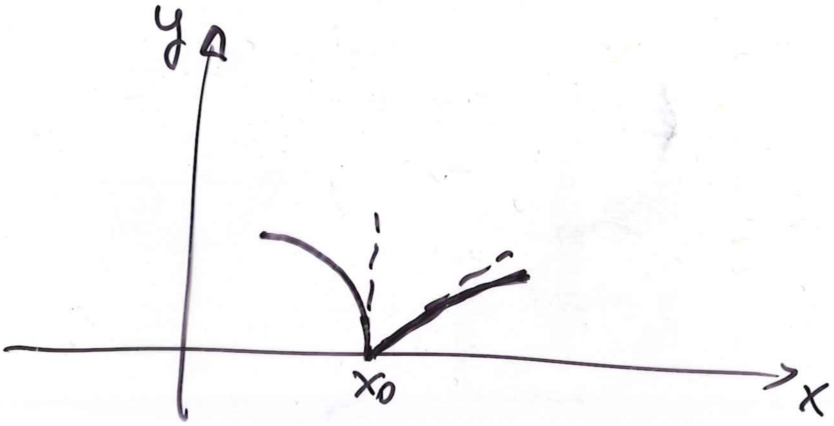
$\hookrightarrow \frac{\sqrt{|h|}}{|h| \operatorname{sgn} h}$

tra le 2 tangenti l'angolo misura 0.

Punti angolosi

ad es. $|\ln x|$, $x_0 = 1$

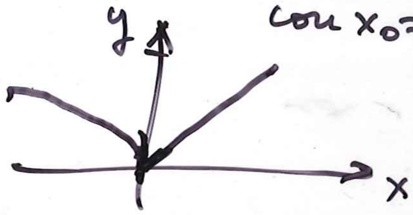




ad es.

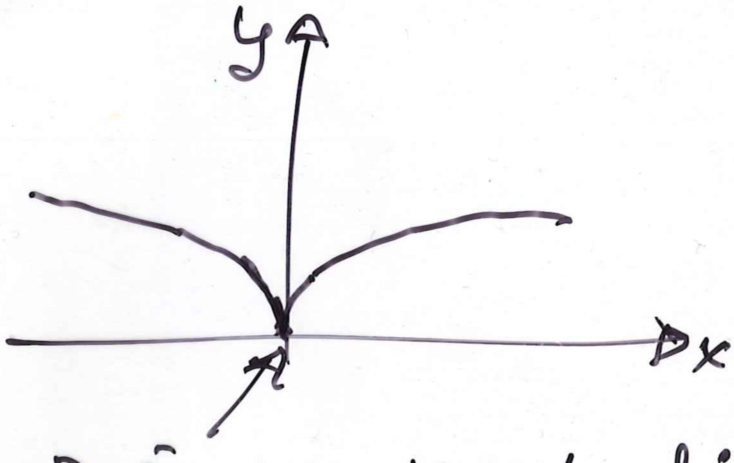
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

con $x_0 = 0$



Invece

$\sqrt{|x|}$



questo è un punto di natura CUSPIDALE

REGOLE di CALCOLO

Ingredienti : 1. DERIVATE di FUNZIONI ELEMENTARI

2. TEOREMI di DERIVAZIONE

1. DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Denotando con $Df(x)$ la derivata di $f(x)$ si ha:

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ (qualunque sia l'esponente α, in ogni x interno all'I.D. della funzione potenza in esame)
- $De^x = e^x$
- $D \ln x = \frac{1}{x}$
- $D \operatorname{sen} x = \cos x$
- $D \cos x = -\operatorname{sen} x$.

Caso particolare : $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. TEOREMI di DERIVAZIONE

Siano f, g definite in (a,b) a valori in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$

Se f e g sono derivabili in x_0 si ha

- $D(f \pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$
- $D(f \cdot g)(x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0)$ (*)

Caso particolare : se $g(x) = c$: $c'(x) = 0$

$D(cf)(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

e quindi : * $D(\log_a x) = D(\log_a e \cdot \ln x) = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$

* derivata di un polinomio ...

(*) Se si pensa che possa valere la formula, $D(fg) = Df \cdot Dg$, provare a derivare $x \cdot 1$

Derivate delle funz. elementari

Sia $x_0 \in$ I.D. di queste funzioni

1) derivata di $f(x) = x^\alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad (x \in (0, +\infty))$ in $x = x_0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} x_0^\alpha \cdot \frac{\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^\alpha - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} x_0^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1}{h} =$$

Ricordo che – dato che $\frac{h}{x_0} \to 0$ – vale l'asintotico

$$\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \frac{h}{x_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} x_0^\alpha \cdot \frac{\alpha \cdot \frac{\cancel{h}}{x_0}}{\cancel{h}} = \alpha x_0^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x^\alpha\right)'_{x=x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1}}$$

Vero anche se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$

2) derivata di $f(x)=e^x$ in $x=x_0\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}\cdot e^{h}-e^{x_0}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0} e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h}=e^{x_0}$$

$\to 1$

$$f'(x)=f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

---

3) derivata di $f(x)=\ln(x)$ in $x_0\in(0,+\infty)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}=$$

$\frac{h}{x_0}\to 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\sim\frac{h}{x_0}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h/x_0}{h}=\frac{1}{x_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\ln x)'_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}\quad\forall x_0\in(0,+\infty)}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'_{x=x_0} = \left(x^{-1}\right)'_{x=x_0} = (-1)\cdot\left(x^{-1-1}\right)_{x=x_0} = -x_0^{-2} = \frac{-1}{x_0^2}$$

per ogni $x_0 \neq 0$

$$\left(\sqrt{x}\right)'_{x=x_0} = \left(x^{1/2}\right)'_{x=x_0} = \frac{1}{2}\left(x^{1/2-1}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{2\,x_0^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

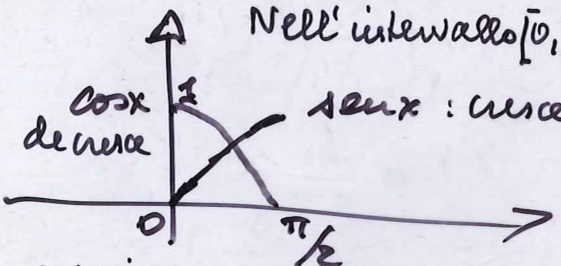
per ogni $x_0 \in (0, +\infty)$

$$(\operatorname{sen} x)'_{x=x_0} = \cos x_0$$

$$(\cos x)'_{x=x_0} = -\operatorname{sen} x_0$$

Come posso controllare di ricordarmi bene i segni? Facendo questo esempio:

Nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



corrispondentemente le tangenti nei punti $x_0 \in (0, \pi/2)$ dovranno avere lo stesso andamento e quindi coeff ang. > 0 per sen x
< 0 per cos x

prendo ad es. $x_0 = \frac{\pi}{4}$ scegliendo le formule corrette trovo

$(\operatorname{sen} x)'_{x=\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

e

$(\cos x)'_{x=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

o.k.

se invece metto il segno scambiato le cose non tornano

$$\left(3x^5 - 4x^3 + 12x^2 - 2x + 7\right)' =$$

$$= (3x^5)' - (4x^3)' + (12x^2)' - (2x)' + (7)' =$$

$$= 3(x^5)' - 4(x^3)' + 12(x^2)' - 2x' + 0 =$$

$$= 15x^4 - 12x^2 + 24x - 2$$

ESEMPIO di CALCOLO della DERIVATA di UN POLINOMIO

TEOREMA di DERIVAZIONE delle FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f: (a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ e $g: (c,d) \to \mathbb{R}$ con $B \subseteq (c,d)$

due funzioni tali che

a,b,c,d eventualmente infiniti

f sia derivabile in $x_0 \in (a,b)$

g " " in $f(x_0) \in B \subseteq (c,d)$

Allora $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e

$$(*) \qquad \boxed{D(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{composizione}}}{g \circ f})(x_0) = g'(f(x_0)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto}}}{\cdot} f'(x_0)}$$

Per ricordarselo provare a scrivere così:

$y = f(x)$ e rappresento $f'(x)$ come $\frac{dy}{dx}$

$z = g(y)$ " $g'(y)$ come $\frac{dz}{dy}$

mentre rappresento $D(g \circ f)$ come $\frac{dz}{dx}$

Allora $(*)$ si rilegge: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

ESEMPI

- Considero $g(y) = \frac{1}{y}$: $\forall y \neq 0 \quad g'(y) = -\frac{1}{y^2}$

  Allora $D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = D(g \circ f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$

  in tutti gli x tali che $f(x) \neq 0$.

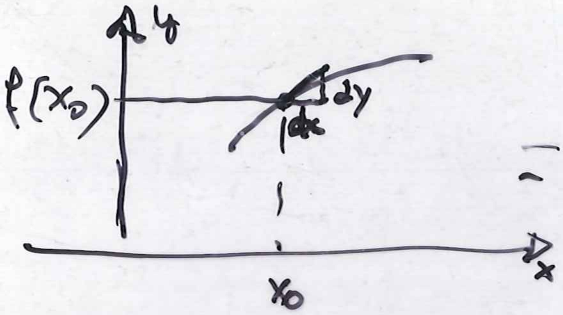
- Conseguenza: FORMULA di DERIVAZIONE del RAPPORTO:

  se $g(x_0) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

  Infatti: $\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\right)$

- In particolare $(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$



dx indica che Δx diventa "piccolo piccolo". Se f è derivabile lo stesso succede a Δy : dy

$$\dashrightarrow \quad f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy}{dx}(x_0)$$

Esempio di derivata di funz. composta in $x = 1$

$f(x) = (1 + \ln x)^{115}$ è composta

$$x \xrightarrow{\ln(\ )} \ln x \xrightarrow{(\ )+1} \ln x + 1 \xrightarrow{(\ )^{115}} f(x)$$

$y = F(x) = \ln x \Rightarrow F'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ $\quad x_0 = 1 \quad F'(1) = 1$

$z = G(y) = y + 1 \Rightarrow G'(y_0) = 1$ in part. $G'(1 + \ln 1) = 1$

$t = H(z) = z^{115} \Rightarrow H'(G(F(x_0)) = 115\, z_0^{114} =$

$= 115\,(1 + \ln x_0)^{114}$

$F(1) = 0$

$G(F(1)) = 0 + 1 = 1$

se $x_0 = 1$ $= 115\,(1 + \ln 1)^{114} =$

$= 115 \cdot 1 = 115$

$$f'(1) = H'(G(F(1))) \cdot G'(F(1)) \cdot F'(1) = H'(1) \cdot G'(1) \cdot F'(1) = 115 \cdot 1 \cdot 1 = 115$$

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di (a,b): allora posso definire la funzione derivata

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$
$$x_0 \mapsto f'(x_0).$$

$$(\tan x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x)^2} =$$

= 1ª interpr.: $1 + \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x)^2} =$

$= 1 + (\operatorname{tg} x)^2$

2ª interpr. $\frac{1}{(\cos x)^2}$

- Sia f derivabile in x_0 e $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f(ax)$ nasce dalla composizione

$$x \xrightarrow{a\cdot(\ )} ax \xrightarrow{f} f(ax)$$

Dunque

$$D(f(ax)) = a f'(ax)$$

Casi particolari:

- $$D(e^{ax}) = a\cdot e^{ax} \qquad \Rightarrow (e^{-x})' = -e^{-x}$$

e quindi

$$D(c^x) = D(e^{(\ln c)x}) = (\ln c)c^x \qquad \begin{pmatrix} c>1 \text{ opp.} \\ 0<c<1 \end{pmatrix}$$

$$D(e^{-x}) = -e^{-x}$$

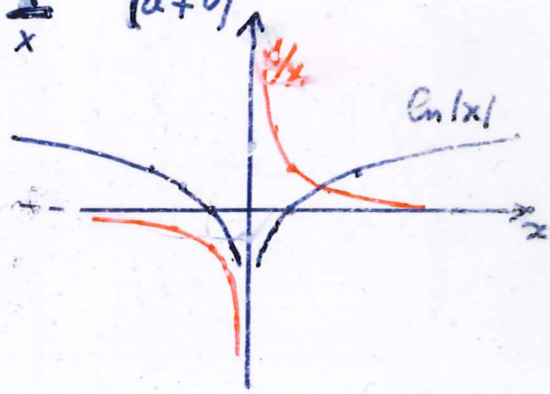
- $$D(\ln ax) = a\cdot\frac{1}{ax} = \frac{1}{x} \quad (a\neq 0)$$

e quindi

$$D(\ln(-x)) = \frac{1}{x}$$

e complessivamente

$$\rightarrow D(\ln|x|) = \frac{1}{x} \leftarrow$$



... tenerlo presente quando cercheremo una funzione la cui derivata sia $\frac{1}{x}$.

<u>Osservazione</u>: derivando una funzione pari si ha una funzione dispari (e viceversa).

<u>**Esercizi**</u>. **Calcolare le derivate di**

1. $\ln x - 5x^3 + 4\cos x$
2. $\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3$
3. $(\log_{10} x)^2$
4. $\operatorname{sen} x \cos x$
5. $\sqrt{1-2x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$
6. x^x
7. $(1-x)^{2x}$