Domanda:

Quando si dice che una funz. è derivabile in un punto x_0?

Risposta:

Considero una funz. $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (ove a può essere $-\infty$ e b può essere $+\infty$) e sia $x_0 \in (a,b)$. Dico che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale al passaggio dal punto x_0 al punto variato x_0+h

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

cioè se esiste

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ATTENZIONE: nel limite, se la derivata esiste, si presenta sempre una F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$, cioè quando Δx diventa piccolo anche Δy diventa piccolo.

Δx piccolo: dx ; Δy piccolo: dy

D6.1

1.

$$(\ln x - 5x^3 + 4\cos x)' =$$

$$= (\ln x)' - 5(x^3)' + 4(\cos x)' =$$

$$= \frac{1}{x} - 5 \cdot 3x^2 + 4(-\operatorname{sen} x) =$$

$$= \frac{1}{x} - 15x^2 - 4\operatorname{sen} x.$$

2.

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 2^x + 3\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' + (2^x)' + 3' =$$

$$= x + (e^{x \cdot \ln 2})' = x + \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} =$$

$$= x + \ln 2 \cdot 2^x$$

3.

$$\left[(\log_{10} x)^2\right]' = \underbrace{(\log_{10} e) \cdot \frac{1}{x}}_{\text{derivata di } \log_{10}(x)} \cdot \underbrace{2(\log_{10} x)}_{\text{derivata del quadrato calcolata in } \log_{10} x} =$$

$$x \xmapsto{\log_{10}(\;)} \log_{10} x \xmapsto{(\;)^2} (\log_{10} x)^2$$

$$= 2\log_{10} e \cdot \frac{\log_{10} x}{x}$$

$$\boxed{(\log_{10} x)' = (\log_{10} e \cdot \ln x)' = \log_{10} e \cdot \frac{1}{x}}$$

4.

$$((\operatorname{sen} x)(\cos x))' = (\operatorname{sen} x)' \cos x + \operatorname{sen} x (\cos x)' =$$

$$= \cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x =$$

$$= (\cos x)^2 - (\operatorname{sen} x)^2 = \cos 2x$$

Infatti

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

$$\Rightarrow (\operatorname{sen} x \cdot \cos x)' = \boxed{\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)' =}$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 2x)' = \text{funz. composta}$$

$$= \frac{1}{2} (2x)' (\operatorname{sen} t)'_{t=2x} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2x = \cos 2x}$$

5.

$$\left(\sqrt{1-2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)' =$$

$$= (0 - 2 \cdot 2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-(\sqrt{1-x})'}{(1-x)} =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)'}{2(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{4(1-x)^{3/2}}$$

oppure:

$$\left((1-2x^2)^{1/2} + \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} \right)' =$$ D6.3

$$= \frac{1}{2}(1-2x^2)^{-1/2}(-4x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)}{2}(1-x)^{-3/2} \cdot (-1) =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[2]{(1-x)^3}}$$

6.

$$(x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' =$$

$$x \longmapsto x\ln x \xmapsto{e^{(\,)}} x^x$$

$$= e^{x\ln x}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

7.

$$\left[(1-x)^{2x}\right]' = \left(e^{2x\ln(1-x)}\right)' =$$

$$= (1-x)^{2x} \cdot (2x\ln(1-x))' =$$

$$= (1-x)^{2x}\left(2 \cdot \ln(1-x) + 2x \cdot \frac{(-1)}{1-x}\right) =$$

$$= (1-x)^{2x}\left(2\ln(1-x) - \frac{2x}{1-x}\right).$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA.

Sia $f:(a,b) \to B \subseteq \mathbb{R}$ (a,b eventualmente infiniti)

ed esista la funzione inversa: $f^{-1}: B \to (a,b)$.

Se

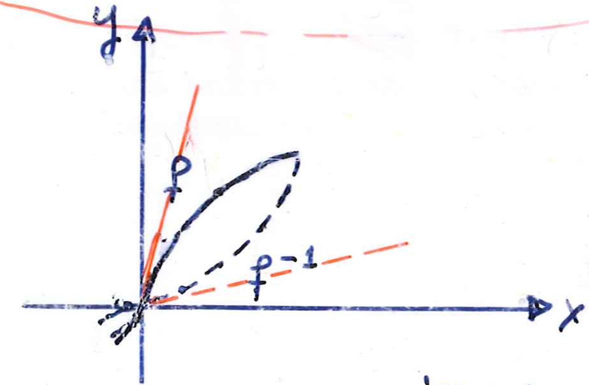
f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$

e

$\boxed{f'(x_0) \neq 0}$

allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta

$$D(f^{-1})_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



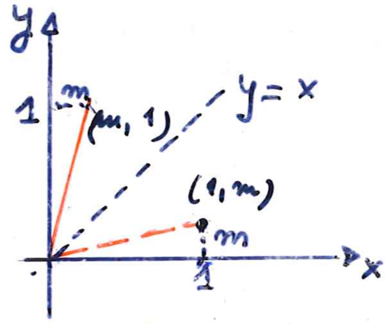


illustrazione con $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

Se $f'(x_0) = 0$ ....

vedi $y = x^3$ e la sua inversa $x = \sqrt[3]{y}$

ATTENZIONE: così formulato il teorema va bene per calcolare i singoli valori della derivata.

Se vogliamo la "funzione derivata di $f^{-1}(y)$" serve ricondurre a y la variabile che compare al 2° membro: $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Esempio: $y = \operatorname{tg} x$ è invertita tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ da

$x = \operatorname{arctg} y$.

$$D \operatorname{arctg} y = \frac{1}{D \operatorname{tg} x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

funzione in x!

$$f : (a,b) \to (c,d)$$

$$f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$$

$$(*) \quad f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \forall x \in (a,b)$$

Sia $x_0 \in (a,b)$, f derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$

Da $(*)$ deduco

$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = (x)'_{x=x_0}$ e quindi, se è vero che f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ (come giustificato dai grafici) per il Teor. di derivazione delle funzioni composte risulta

$$(f^{-1}(y))'_{y=f(x_0)} \cdot f'(x_0) = 1$$

cioè

$$(f^{-1}(y))'_{y=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Secondo metodo per giustificare la formula per il calcolo della derivata dell'inversa

ESEMPIO

$y = \tan x$ $\qquad \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$\qquad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\arctan y)'_{y=\tan x_0} = \frac{1}{(\tan x)'_{x=x_0}} = \frac{1}{1+(\tan x_0)^2}$$

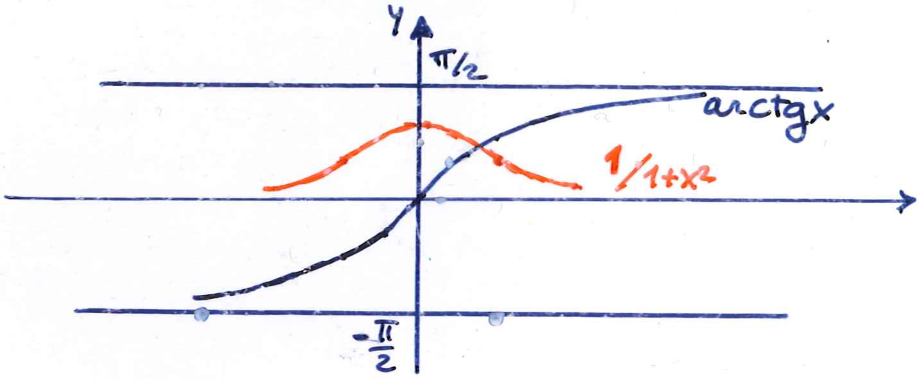
se $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ho $(\arctan y)'_{y=1} = \frac{1}{1+(1)^2} = \frac{1}{2}$

In generale:

$$(\arctan y)'_{y=\tan x} = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Riesprimendo anche la funzione inversa nella variabile x abbiamo

$$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



- Similmente

$\operatorname{sen}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ è invertita da arcsen, cioè

$y = f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$

$$\Rightarrow D \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{D(\operatorname{sen} x)_{x=\operatorname{arcsen} y}} = \frac{1}{(\cos x)_{x=\operatorname{arcsen} y}} = ?$$

se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow D \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$: e $(\operatorname{arcsen} x)'$ è def. su $(-1,1)$

- Similmente

$\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$ è invertita da arccos, cioè

$y = f(x) = \cos x$ e $x = f^{-1}(y) = \arccos y$

$$\Rightarrow D \arccos y = \frac{1}{D(\cos x)_{x=\arccos y}} = \frac{-1}{(\operatorname{sen} x)_{x=\arccos y}} = ?$$

se $x \in [0,\pi]$, $\operatorname{sen} x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow D \arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$: e $(\arccos x)'$ è def su $(-1,1)$

$y = \operatorname{sen} x \qquad \operatorname{sen}: \overset{x}{[-\pi/2, \pi/2]} \longrightarrow [-1, 1]$

$\operatorname{arcsen}: [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$x \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$(\operatorname{arcsen} y)'_{y = \operatorname{sen} x} = \frac{1}{(\operatorname{sen} x)'} = \frac{1}{\cos x}$$

$\Rightarrow$ in $y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ e in $y = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
la derivata non c'è poiché
$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

e devo trasformare $\cos x$ in una funzione di $y = \operatorname{sen} x$

Vale: $(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \Rightarrow$

$(\cos x)^2 = 1 - (\operatorname{sen} x)^2$

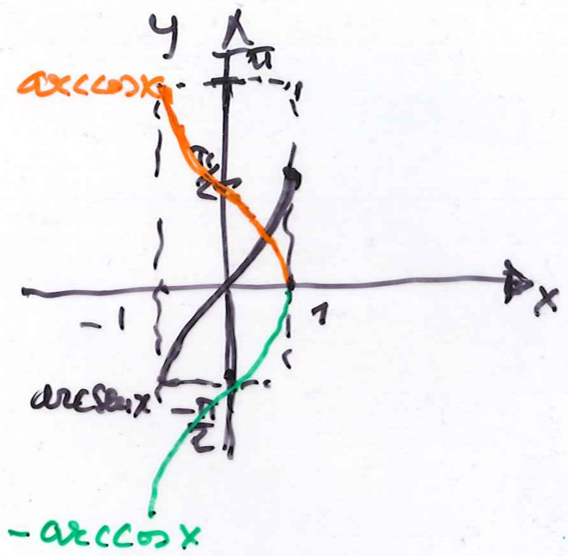
osservo che $x \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \cos x > 0$

$$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2} = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\Rightarrow (\operatorname{arcsen} y)'_{y = \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Similmente provo (vedi D8)

$$(\arccos y)'_{y = \cos x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$$



Il risultato si può anche trovare con un'oss. sui grafici:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$
$$\Downarrow$$
$$(\arcsin x)' = -(\arccos x)'$$

Quindi è ovvio che

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La derivata di una funzione pari ha qualche forma di simmetria? $f(x)$ è pari se e solo se:

$f(-x) = f(x)$ $\quad \forall x \in$ I.D. che deve essere simmetrico rispetto a $x=0$

$$\Downarrow$$

$-1 \cdot f'(-x) = f'(x)$ $\quad \forall x$ per cui $\exists f'$

$\Longrightarrow$ $f'(x)$ è una funz. dispari.

Similmente:

La derivata di una funz dispari è pari

$f(-x) = -f(x)$ $\quad \forall x \in$ I.D. che deve essere simm. risp. $x=0$ (sull'asse x)

$-f'(-x) = -f'(x)$ $\quad \forall x$ per cui $\exists f'$

$f'(-x) = f'(x)$

Queste osservazioni possono servire per operare un controllo sull'esito di una derivazione.

Ad es. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ è pari (VERIFICARLO)

... non può avere come derivata $\cos x^2$ che è ancora pari! Infatti la sua derivata è $2x \cos x^2$... che è dispari

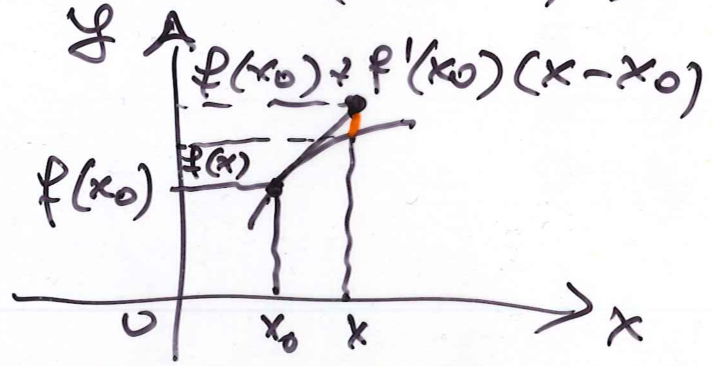
LEMMA FONDAMENTALE

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e sia f derivabile in x_0. Allora posso approssimare il valore della funzione in un punto $x_0+h \in (a,b)$ con h abbastanza piccolo ($h \to 0$) come segue

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$$

ATTENZIONE: se scrivo $x = x_0+h$ e sostituisco trovo
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è l'eq. della retta tang. in $(x_0, f(x_0))$ al grafico di f



per questo parlo di approssimazione LINEARE di $f(x)$ in prossimità di x_0.

$f'(x_0)\, h = df(x_0)$
differenziale in x_0

Se $f(x) = x$, $df = 1\cdot h$
Si usa indicare direttamente questo differenziale con dx
$\Rightarrow dx = h$
Per tutte le f derivabili in x_0 scrivo $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$
... vedi scrittura di $f'(x_0)$ come df/dx

Dim. Se f è derivabile in x_0, $\exists$ finito

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$\Updownarrow$ sommo $-f'(x_0)$

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) - f'(x_0) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

$\Updownarrow$ la somma di 2 lim. è il lim. della somma

che, per confronto di infinitesimi, si traduce in:

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h)$$

per $h \to 0$

Cioè:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)} \quad \text{per } h \to 0$$

Questa approssimazione è fondamentale:

1) mi serve ora per provare la continuità delle funz. derivabili
2) è legata al concetto di DIFFERENZIALE (vedi pag D9)
3) è un primo esempio di approssimazione di TAYLOR
4) verrà generalizzata in 2 VARIABILI

Dimostro che se f è derivabile in x_0 è continua in x_0.

La tesi è $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Pongo $x - x_0 = h$:

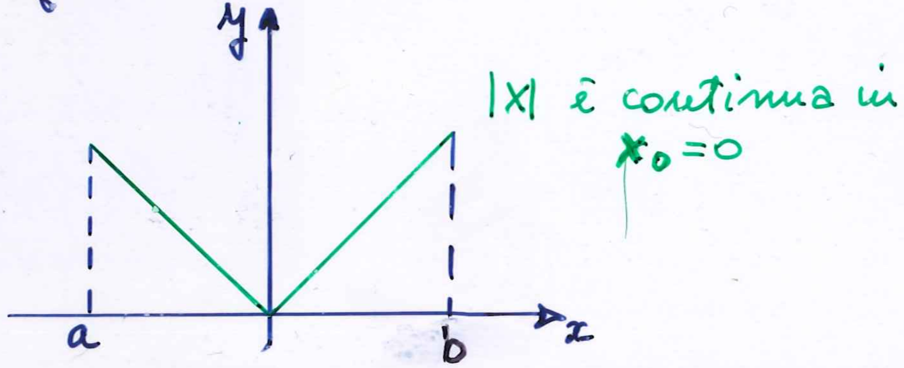
$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) \underset{\substack{\text{LEMMA}\\ \text{FOND.}}}{=} \lim_{h \to 0} \left(f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) \right) =$$

$$= f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0)$$

DERIVATE E ....

- se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ allora $f(x)$ è continua in x_0.

il viceversa è falso



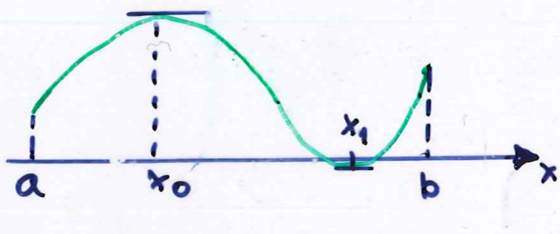
- Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ha in $x_0 \in (a,b)$ un punto di massimo relativo ed è derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0) = 0$$

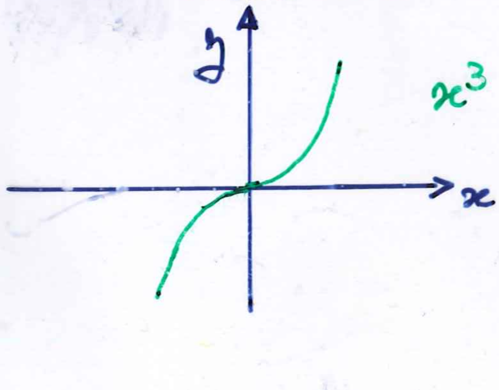
Idem se x_1 è un punto di minimo relativo

(Sul testo : ESTREMI LOCALI)

TEOR. DI FERMAT



ATTENZIONE: il viceversa è falso



$x_0 = 0$ è un punto a tangente stazionaria MA non estremo locale

DIM. del TEOR. DI FERMAT

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Per ipotesi $x_0 \in (a,b)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO, cioè:

$\exists$ un intervallo $(c,d) \subseteq (a,b)$ e $(c,d) \ni x_0$ t.c. $\forall x \in (c,d)$

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Sempre per ipotesi f è derivabile in x_0 cioè esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Ma:

se $h \to 0^+$ $\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) \leq f(x_0) \\ h > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta y}{h} < 0$

se $h \to 0^-$ $\left.\begin{array}{l} f(x_0+h) \leq f(x_0) \\ h < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta y}{h} > 0$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta y}{h} \leq 0$ per la contronominale del TEOR. della PERM. del SEGNO

$\lim_{h \to 0^-} \frac{\Delta y}{h} \geq 0$ "

Dato che esiste $f'(x_0)$, deve essere

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\Delta y}{h}$$

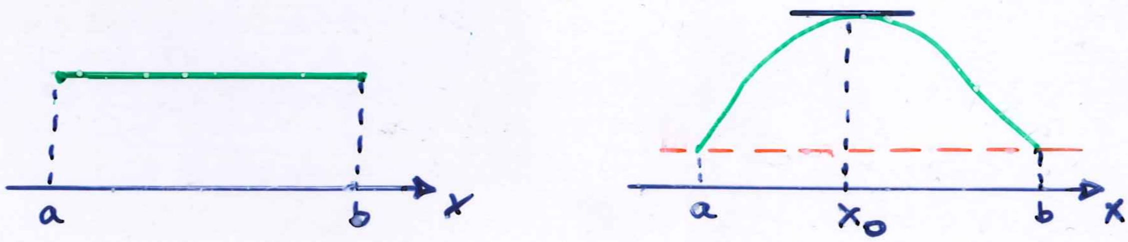
$$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Però

- TEOR. di ROLLE: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$, sicuramente esiste in (a,b) ALMENO un punto x_0 t.c.

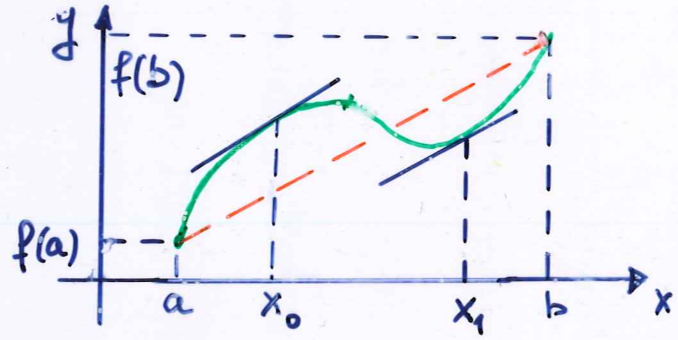
$$f'(x_0) = 0$$



Più in generale

- TEOREMA di LAGRANGE: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) sicuramente esiste in (a,b) ALMENO un punto x_0 t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Provare con $f(x) = x^2$ o $f(x) = \frac{1}{x}$

Se ne deduce il test di monotonia e il metodo per la ricerca di massimi e minimi locali.

DIM. TEOR. ROLLE.

f cont. in $[a,b]$ $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ in $[a,b]$ ci sono
- un punto di MAX assoluto
- un punto di min assoluto.

$\boxed{1^\circ \text{caso}}$

Questi due punti cadono negli estremi dell'intervallo; ad es. $f(a)=M$ e $f(b)=m$. Allora per definizione

$\forall x \in (a,b): \quad f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

ma per ipotesi $f(b)=f(a) \Rightarrow f(x)=f(a)$ COSTANTE

$\Rightarrow f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$

VA BENE QUALUNQUE x_0 dell'intervallo.

$\boxed{2^\circ \text{caso}}$

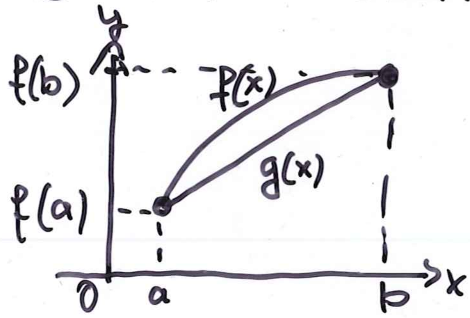
Almeno uno tra punto di MAX e punto di min, cade INTERNAMENTE ad (a,b).

Sia ad es. $x_0 \in (a,b)$ il punto di MAX assoluto $\Rightarrow$ esiste tutto un intervallo $(c,d) \subseteq (a,b)$ e con $x_0 \in (c,d)$

$\Rightarrow x_0$ è punto di MAX RELATIVO

$\Rightarrow$ per il TEOR di FERMAT: $f'(x_0)=0$ c.v.d.

DIM. TEOR. LAGRANGE



la funzione che ha per grafico la retta per $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ è

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Essa è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e per costruzione $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$.

$\Rightarrow f(x)-g(x)$

1. è continua in $[a,b]$ perché differenza di funz. cont.
2. è derivabile in (a,b) " " " funz. der.
3. $f(a)-g(a)=0=f(b)-g(b)$

Cioè soddisfa le ipotesi del teor. di Rolle $\Rightarrow$

$\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0)-g'(x_0)=0 \Rightarrow$

$$f'(x_0)=g'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ c.v.d.