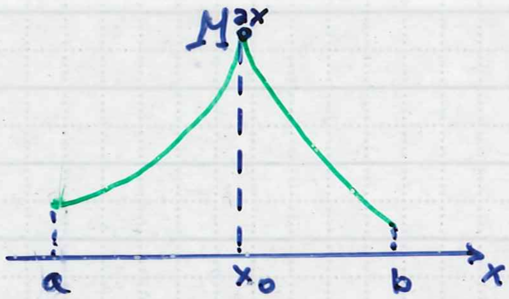
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

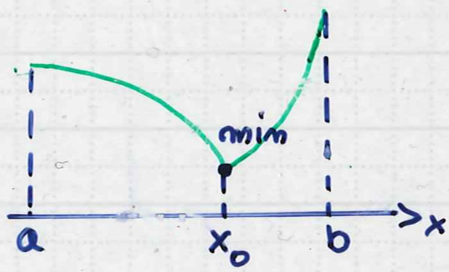
- Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è crescente in (a,b) (*)
- Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è decrescente in (a,b)
- Se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è costante in (a,b)

$$\Downarrow$$

- Se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$
  in x_0 c'è un MASSIMO RELATIVO

- Se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$
  in x_0 c'è un MINIMO RELATIVO





Altra conseguenza, sulle primitive
(dico che $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ se $F(x)$ è definita dove sullo stesso intervallo su cui lo è $f(x)$ e $F'(x) = f(x)$).

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive di una stessa funzione su uno stesso intervallo $[a,b]$ $f(x)$, esse differiscono per una costante.

Infatti $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow (F-G)(x) = c \Rightarrow F(x) = c + G(x)$.

(*) Dim. $\forall s,t$ con $a<s<t<b$ si ha che

f è continua in $[s,t]$, derivabile in $(s,t) \Rightarrow$

$\exists\, x_0 \in (s,t)$ t.c. $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(x_0)$

Se $t > s$, visto che $f'(x_0) > 0$, anche $f(t) > f(s)$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cont. in $[a,b]$, derivab. in (a,b)

Se $f'(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ f cresce in (a,b). (decresce)

Dim. La tesi è $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)} \quad (\geq)$$

$a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow [x_1, x_2] \subsetneq [a,b]$

$\Rightarrow f$ è conti in $[x_1, x_2]$ e deriv. in (x_1, x_2)

$\Rightarrow$ VALE LAGRANGE:

$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$\Updownarrow$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0}$$

<0 $\leftrightarrow$ ≥ 0 poiché per ipotesi $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$

$f'(x) < 0$

>0 per ipotesi poiché $x_2 > x_1$

prod < 0

prodotto > 0

$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. ($<$)

$\boxed{\text{Tesi}}$

Se $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ gli stessi conti portano $f(x_2) - f(x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1)$

$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in (a,b) \Rightarrow$ cost.

Studi di funz.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{x^2-4+5}{x^2-4} = 1 + \frac{5}{x^2-4}$$

I.D. $x^2-4 \neq 0$: $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

è continua in $(-\infty,-2)$, in $(-2,2)$, in $(2,+\infty)$

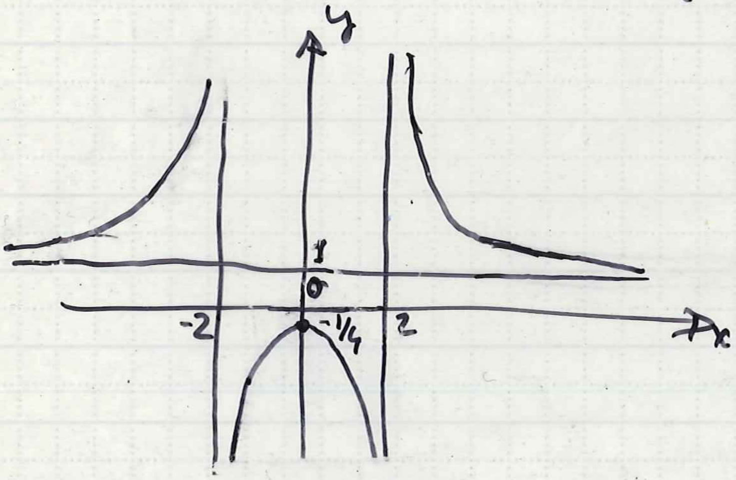
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ asintoto orizz. per $x \to -\infty$: $y=1$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

osservo che f è pari $\Rightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



$f(0) = -\frac{1}{4}$

È vero che il grafico è questo? Verifico la monotonia

$$f'(x) = \left(1 + \frac{5}{x^2-4}\right)' = 0 + 5 \cdot \frac{-2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in $x=0$ max relativo : $f(0) = -1/4$

in $(-\infty,-2)$ cresce e in $(-2,0)$ cresce

in $(0,2)$ decresce e in $(2,+\infty)$ decresce

Ancora uso del teor. di Lagrange e sue conseguenze

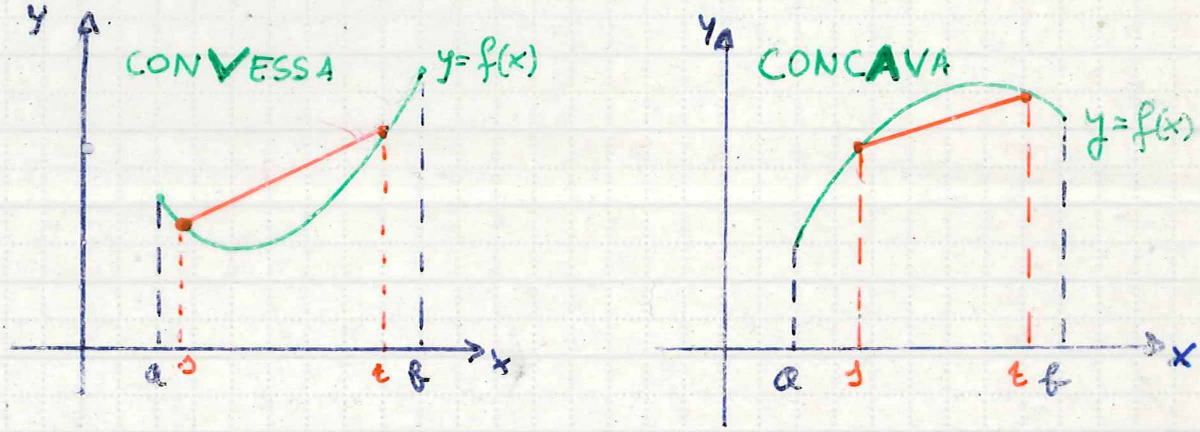
■ Studio della convessità - concavità ...

Dico che $f(x)$ è convessa in $[a,b]$ se per tutti gli $s, t \in [a,b]$ il segmento che congiunge

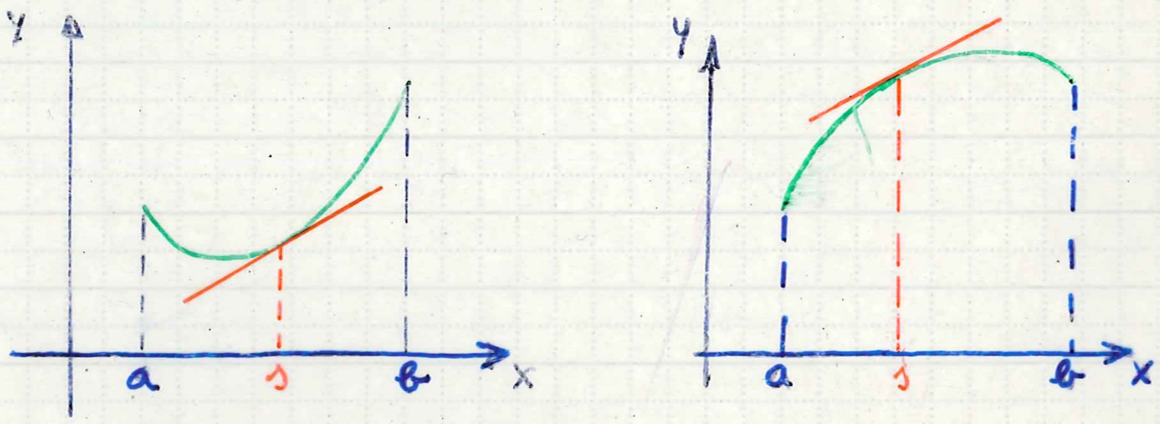
$(s, f(s))$ con $(t, f(t))$

sta SOPRA il grafico di f relativo all'intervallo $[s,t]$

(è concava ... se sta SOTTO)



NOTARE: se la funzione è derivabile in $[a,b]$ in ogni punto del grafico, $(s, f(s))$ è definita la TANGENTE. Dove stanno le tangenti nei due casi?



E che cosa fa il coefficiente angolare della tangente al variare di s in (a,b), nei due casi?

Se f è convessa in (a,b) allora f' cresce in (a,b)

Enunciate così sono **condizioni necessarie di convessità** (concavità). Usando il teor. di Lagrange si fa vedere che sono anche sufficienti, cioè

se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è derivabile, essa è convessa se e solo se la sua derivata $f'(x)$ è una funzione crescente

(è concava ... $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ decrescente)

Se esiste anche la derivata della derivata **prima** (= **derivata seconda** : $f''(x)$) in (a,b) **allora**

f convessa	$\Leftrightarrow$	$f''(x)\geq 0$	in (a,b)	e vale = solo in punti isolati
f concava	$\Leftrightarrow$	$f''(x)\leq 0$	in (a,b)	

Esempi

$f(x)=x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$

$f(x)=\ln x$ è concava in $(0,+\infty)$: $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

$f(x)=x^3$ è ......

$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f''=6x <$ convessa per $x>0$, concava per $x<0$ $\Rightarrow x=0$ punto di flesso

Punti di flesso = punti in cui **cambia la concavità**

Teorema di de l'Hospital per il calcolo dei limiti con forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

• Siano $f, g : (a,b)\to\mathbb{R}$ derivabili

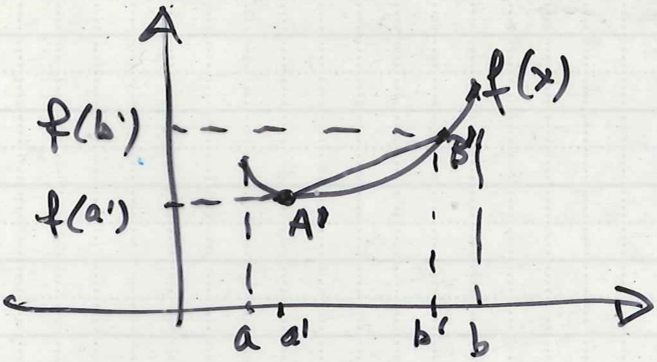
•• Sia $g(x)\neq 0 \;\forall x\in(a,b)$ e $g'(x)\neq 0 \;\forall x\in(a,b)$

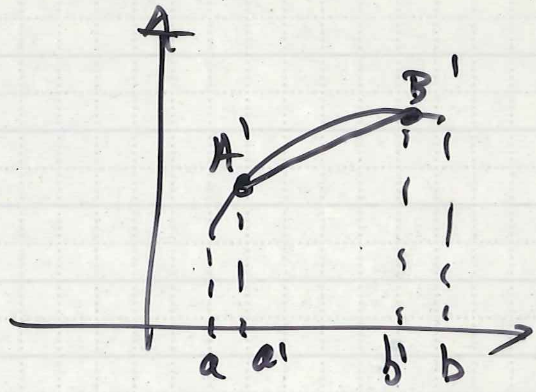
••• Se $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$

•••• ed esiste $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

allora $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

l'ipotesi ••• può essere sostituita da $\lim\limits_{x\to a+} f = \lim\limits_{x\to a+} g = \pm\infty$





$\forall\, a', b' \in (a,b)$

$A'B'$ è un segmento che giace sopra il grafico:

f è <u>convessa</u> in (a,b)

$\forall\, a', b' \in (a,b)$

$A'B'$ " " sotto " " grafico:

f è <u>concava</u> in (a,b)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ Supponiamo che $\forall x \in (a,b)$ esista $f'(x)$

$\Rightarrow$ definisco $f': (a,b) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f'(x)$

Derivata di f' se esiste in $x \in (a,b)$ è

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \text{(esistente finito)}$$

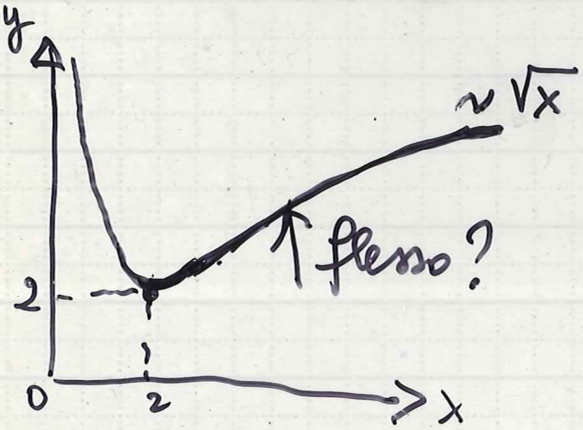
$$= (f')'(x) = f''(x)$$

<u>derivata seconda di f in x</u>

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

I.D. $\frac{x^2+4}{x} \geq 0 \iff x > 0$: $(0, +\infty)$

zeri non ce ne sono $\Rightarrow f(x) > 0$ su $(0, +\infty)$
(essendo $\sqrt{g(x)} \geq 0 \ \forall x$ su cui $g(x) \geq 0$ e quindi
$\sqrt{\ }$ è definita)



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Senza asintoti obliqui perché l'ordine di infinito è quello di $\sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}} \cdot \left(\frac{x^2+4}{x}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+4}} \cdot \frac{2x \cdot x - 1(x^2+4)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+4}} \cdot \frac{x^2-4}{x^2} \geq 0$$

Den > 0 sempre in $(0, +\infty)$

$\sqrt{\frac{x}{x^2+4}} > 0$ " " $\Rightarrow f' \geq 0 \iff \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x \in \text{I.D.} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \leq -2 \text{ oppure } x \geq 2 \\ x > 0 \end{cases} \iff x \geq 2$

$f'(x) < 0$ per $x \in (0, 2)$.

$\Rightarrow f(x)$ decresce in $(0, 2)$
cresce in $(2, +\infty)$

$x = 2$ è un punto di MIN. rel. $f(2) = 2$

Cercare il flesso di $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x}}$

Sapendo che $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+4}}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2}$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)'\cdot\frac{x^2-4}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\cdot\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{x^2+4-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}}\cdot\frac{x^2-4}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\cdot\frac{-1}{2}\,\frac{(4-x^2)^2}{(x^2+4)^2\,x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\cdot\frac{8}{x^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\left(\frac{-(4-x^2)^2}{2x^2(x^2+4)^2}+\frac{\cancel{x}}{x^2+4}\cdot\frac{8}{x^{\cancel{3}\,2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\;\frac{-(4-x^2)^2+2\cdot 8(x^2+4)}{2x^2(x^2+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\;\frac{-((x^2)^2-8x^2+16)+16x^2+64}{2(x^2+4)^2x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\;\frac{-(x^2)^2+24x^2+48}{2x^2(x^2+4)}\geq 0\iff$$

$$-(x^2)^2+24x^2+48\geq 0$$

$$\left(\sqrt{A}+\sqrt{\frac{1}{A}}\right)=\sqrt{A}\left(1+\frac{1}{\sqrt{A}}\cdot\sqrt{\frac{1}{A}}\right)=$$

$$=\sqrt{A}\left(1+\sqrt{\frac{1}{A^2}}\right)=\sqrt{A}\left(1+\frac{1}{|A|}\right)$$

$-t^2+24t+48 \geq 0$ $\quad t = x^2$

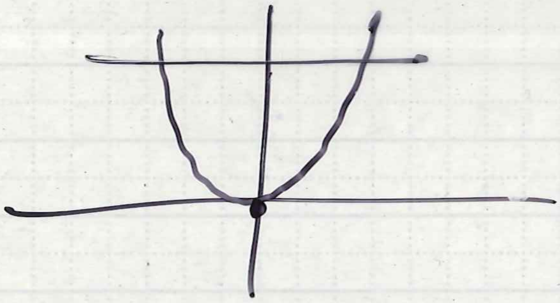
$t^2 - 24t - 48 \leq 0$

Risolvo $t^2 - 24t - 48 = 0$

$t = 12 \pm \sqrt{144+48} = 12 \pm \sqrt{192}$

$x^2 = 12 + \sqrt{192}$

$\Rightarrow$ diseq: $0 \leq x^2 \leq 12 + \sqrt{192}$ $\quad$ ($x \geq 0$ nell'(1))



$\Updownarrow$

$0 < x < \sqrt{12+\sqrt{192}}$

f è convessa in $(0, \sqrt{12+\sqrt{192}})$

concava in $(\sqrt{12+\sqrt{192}}, +\infty)$

e ha un punto di flesso in

$x = \sqrt{12+\sqrt{192}}$.

Studiare $\dfrac{3x+5}{x^2-1}$

Studiare

$$f(x) = -2x + \ln(e^x - 4)$$

I.D. $e^x - 4 > 0 \Rightarrow e^x > 4 \Rightarrow x > \ln 4$

$(\ln 4, +\infty)$

è continua in tutto l'interv. in quanto somma di composte di funz. cont.

$$\lim_{x \to \ln 4^+} f(x) = -2\ln 4 - \infty = -\infty$$

Asint. vert. di eq. $x = \ln 4$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = [-\infty + \infty] \text{ f. i.}$$

$$f(x) = -2x + \ln e^x \cdot \left(1 - \frac{4}{e^x}\right) =$$

$$= -2x + \ln e^x + \ln\left(1 - \frac{4}{e^x}\right) =$$

$$= -2x + x + \ln\left(1 - \frac{4}{e^x}\right) =$$

$$= -x + \underbrace{\ln\left(1 - \frac{4}{e^x}\right)}_{0} \to -\infty$$

come $-x$

Asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} + \frac{\ln(1 - 4/e^x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{4}{e^x}\right) = 0$$

Eq. asintoto $y = -x$

$$f'(x) = \left(-2x + \ln(e^x - 4)\right)' =$$

$$= -2 + \frac{e^x}{e^x - 4} = \frac{-2e^x + 8 + e^x}{e^x - 4} =$$

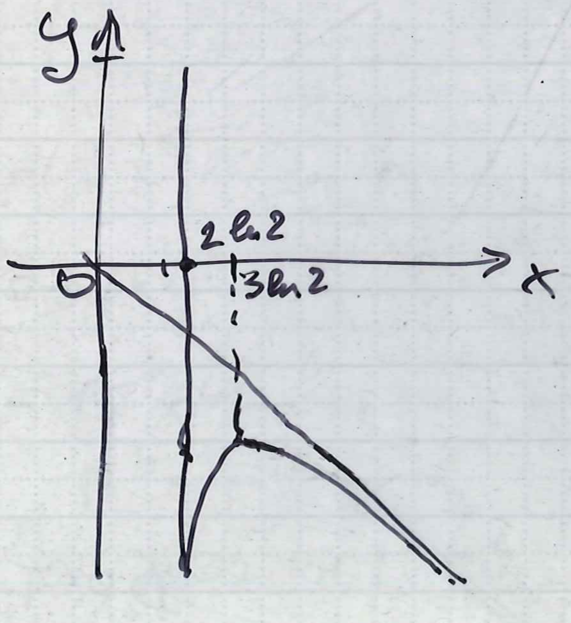
$$= \frac{8 - e^x}{e^x - 4} \geq 0 \ ?$$

In qs. intervallo $(\ln 4, +\infty)$ il denominatore è $> 0 \Rightarrow$

$$f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} 8 - e^x \geq 0 \\ x \in (\ln 4, +\infty) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \leq \ln 8 \\ x > \ln 4 \end{cases} \iff x \in (\ln 4, \ln 8)$$

f cresce in $(\ln 4, \ln 8)$
decresce in $(\ln 8, +\infty)$
ha max rel in $x = \ln 8$



$$f(\ln 8) = -2\ln 8 + \ln 4 =$$
$$= -6\ln 2 + 2\ln 2 =$$
$$= -4\ln 2$$

$$f'' = \frac{-e^x(e^x - 4) - e^x(8 - e^x)}{(e^x - 4)^2} =$$

$$= \frac{-e^{2x} + e^{2x} - 4e^x}{(e^x - 4)^2} < 0$$