Enunciate così sono **condizioni necessarie di convessità** (concavità). Usando il teor. di Lagrange si fa vedere che sono anche sufficienti. cioè

se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è derivabile, essa è convessa se e solo se la sua derivata $f'(x)$ è una funzione crescente

(è concava ... $\iff$ $f'(x)$ decrescente)

Se esiste anche la derivata della derivata **prima**
(= **derivata seconda** : $f''(x)$) in (a,b) **allora**

f convessa $\iff$ $f''(x)\geq 0$ in (a,b)
f concava $\iff$ $f''(x)\leq 0$ in (a,b)

e vale = solo in punti isolati

Esempi

$f(x)=x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$
$f(x)=\ln x$ è concava in $(0,+\infty)$: $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$
$f(x)=x^3$ è ......
$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f''=6x <$ convessa per $x>0$, concava per $x<0$ $\Rightarrow x=0$ punto di flesso

Punti di flesso = punti in cui cambia la concavità

■ TEOREMA di de l'Hospital per il calcolo dei limiti con forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

- Siano $f, g:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabili
- • Sia $g(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$ e $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$
- • • Se $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$
- • • • ed esiste $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

allora $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

l'ipotesi • • • può essere sostituita da $\lim_{x\to a+} f = \lim_{x\to a+} g = \pm\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ con $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$\left((a,b) = (0,+\infty) \right)$

De l'Hospital

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ se $\alpha > 1$ ho ancora una f.i.

$$\overset{=}{H} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2}}{\beta^2 e^{\beta x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ se $\alpha > 2$ ho ancora f.i.

Sia:

$n = \lfloor \alpha \rfloor < \alpha < n+1$

$$\overset{=}{H} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1) x^{\alpha-n}}{\beta^n e^{\beta x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ poiché $\alpha - n > 0$

$$\overset{=}{H} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n) \, x^{\alpha-n-1}}{\beta^{n+1} \, e^{\beta x}} = \frac{0}{\infty}$$ poiché $\alpha - n - 1 < 0$

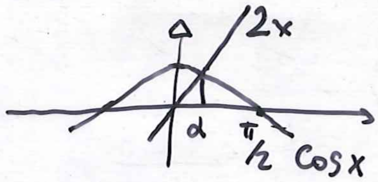
$x^{\alpha-n-1} \to 0$

$e^{\beta x} \to +\infty$

$= 0$

D13.2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\operatorname{sen}x}{\cos x-2x} =$$



Intervallo di continuità $(\alpha, +\infty)$

$$\underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{-\operatorname{sen}x-2} = ?$$

oscilla? se uso de l'Hospital non approdo a nulla! Invece:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{2x}\right)}{-2x\left(1-\frac{\cos x}{2x}\right)} = -1$$

$$\frac{1+0}{1+0} = 1$$

$\boxed{\alpha>0}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

Interv. di continuità: $(0, +\infty)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x+o(x)-1-x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} = ?$$

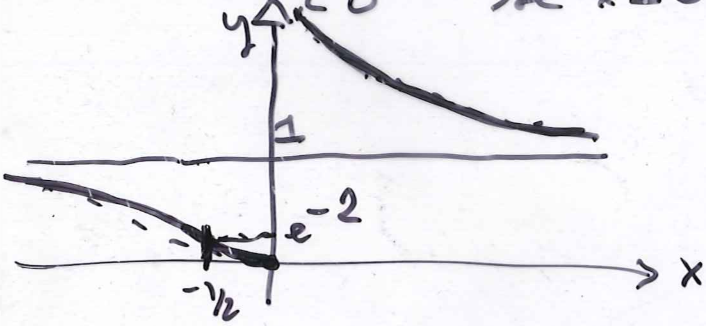
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \text{ L.N.}}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-0-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{-x(-x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{-x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right) = 0$$ senza de l'Hospital

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$



I.D. $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{\pm\infty}} = 1^{\pm}$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$$

$x=0$ asint. vert.

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = 0$$

$$f' = e^{1/x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -e^{1/x}\cdot\left(\frac{+1}{x^2}\right) < 0 \quad \forall x\neq 0$$

$\Rightarrow f$ decresce in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-e^{1/x}}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

sostituisco $-\frac{1}{x} = t,\ t\to+\infty$

$$= \lim_{t\to+\infty} -t^2\cdot e^{-t} = [\infty\cdot 0]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\frac{t^2}{e^t} = 0.$$

per $x\to 0^-$ le tangenti al grafico hanno coeff. ang. sempre più vicino a zero $\Rightarrow$ il grafico entra in $(0,0)$ come l'asse x

$$f'' = -\left(e^{1/x}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{+1}{x^2}\right) + e^{1/x}\cdot\frac{(-2)}{x^3}\right) =$$

$$= e^{1/x}\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^4}(1+2x) \geq 0$$

$\forall x\neq 0 \quad e^{1/x} > 0$ e $x^4 > 0$

$$f'' \geq 0 \iff \begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'' \geq 0$ in $(-1/2, 0)$ e in $(0,+\infty)$.

$\Rightarrow f$ è concava in $(-\infty, -\frac{1}{2})$

convessa in $(-\frac{1}{2}, 0)$ e in $(0,+\infty)$

e ha un punto di flesso in $x = -\frac{1}{2}$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = e^{1/-1/2} = e^{-2}$$

Per esercizio studiare
$$f(x) = \begin{cases} x e^{1/x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

Si mostri che la funzione $f(x) = e^{2x} + 3x^3 = y$ è invertibile in $\mathbb{R}$ e si calcoli il valore della derivata della sua inversa in $y = 1$

$f^{-1}{}'(y)$

$f' = 2e^{2x} + 9x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ poiché $e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

f è monotona crescente $\Rightarrow \exists f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Qual è x_0 t.c.

$f(x_0) = 1$ $\qquad f(0) = e^0 + 0 = 1 \Rightarrow x_0 = 0.$

$$\left(f^{-1}\right)'_{y=1} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq -1 \\ x^3 + x^2 + x & \text{se } -1 < x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se. } x \geq 1 \end{cases}$$

è derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

in $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ certamente sì (è definita come un polinomio)

$F(x) = x^3$ $\qquad F'(x) = 3x^2$

$G(x) = x^3 + x^2 + x$ $\qquad G'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$H(x) = x$ $\qquad K(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad H'(x) = 1$ $\qquad K'(x) = x$

in $x=-1$ $\quad \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} 3x^2 = 3$

$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} 3x^2+2x+1 = 2$

sono diversi $\Rightarrow$ certamente in $x=-1$ la funz non è derivabile

in $x=0$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x^2+3x+1 = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

? così non posso dedurre nulla

in $x=1$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1$?

non posso dedurre nulla.

Avrei dovuto prima di tutto controllare se $f(x)$ in $x=-1$, 0, 1 è continua (poiché se non è continua non è derivabile)

in $\boxed{x=-1}$ $\quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 = -1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^3+x^2+x) = -1$

f è cont (ma non derivabile $\Rightarrow$ punto angoloso)

in $\boxed{x=0}$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3+x^2+x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ $\quad \Rightarrow$ continua

e derivabile poiché $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$

in $\boxed{x=1}$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}$) non continua

Primitive

Abbiamo visto che data una funzione continua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ le sue primitive su $[a,b]$ si possono ottenere tutte da una nota pur di aggiungere una costante (e quindi sono tante quanti i numeri reali)

Come calcolare le primitive?

a) PRIMITIVE ELEMENTARI

- $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^β (se $\beta \neq -1$) è $\dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$
- $D(\ln|x|) = \dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow$ una primitiva di x^{-1} è $\ln|x|$
- $D(e^x) = e^x$ $\Rightarrow$ " " " e^x è e^x
- $D(a^x) = \ln a \cdot a^x$ $\Rightarrow$ " " " a^x è $\dfrac{a^x}{\ln a}$
- $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\Rightarrow$ " " " $\cos x$ è $\operatorname{sen} x$
- $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ $\Rightarrow$ " " " $\operatorname{sen} x$ è $-\cos x$
- $D(\operatorname{tg} x) = 1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\Rightarrow$ " " " $1+\operatorname{tg}^2 x$ è $\operatorname{tg} x$

  $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ "
- $D(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow$ una " " $\dfrac{1}{1+x^2}$ è $\operatorname{arctg} x$

b) Metodi di integrazione: sono riletture delle principali regole di derivazione:

per scomposizione $\Leftarrow$
- derivazione della somma
- derivazione del prodotto per un numero

per parti $\Leftarrow$ • derivazione del prodotto di funzioni

per sostituz. $\Leftarrow$ • derivazione di funzione composta.

x^{β} di chi può essere derivata?

$$(kx^{\alpha})' = k\alpha\, x^{\alpha-1} = x^{\beta} \quad \begin{cases} k\alpha = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\alpha} \\ \alpha - 1 = \beta \Rightarrow \alpha = \beta + 1 \end{cases}$$

x^{β} è derivata di $\frac{1}{\beta+1} x^{\beta+1}$

salvo il caso in cui $\beta + 1 = 0$

Cioè salvo $x^{-1} = \frac{1}{x}$ che è derivata di $\ln|x|$

Tutte le possibili primitive di x^{β} con $\beta \neq -1$ sono $\frac{1}{\beta+1} x^{\beta+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Tutte le possibili primitive di x^{-1} sono

$$\ln|x| + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

L'<u>insieme</u> di tutte le possibili primitive di una funz. $f(x)$ continua su $[a,b]$ è denotato con

$$\int f(x)\, dx$$

ed è detto INTEGRALE INDEFINITO di $f(x)$ relativamente ad $[a,b]$.

È UN INSIEME (di funzioni)

$$\int a^x\,dx = ?$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

$$(ka^x)' = (k \ln a)\, a^x = a^x \implies k = \frac{1}{\ln a}$$

$$\int a^x\,dx = \left\{ \frac{1}{\ln a} a^x + c \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$ abbreviamo

$$= \frac{1}{\ln a} a^x + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

$$\int (x^3 - 4x^2 + 3x - 1)\,dx =$$

$$= \frac{x^{3+1}}{3+1} - 4 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\,\frac{x^{1+1}}{1+1} - x + c =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 4\,\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 - x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)\,dx =$$

$$= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + c, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\int (\operatorname{tg} x)^2\,dx = \int \left[(1 + (\operatorname{tg} x)^2) - 1 \right] dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$c \in \mathbb{R}$$

I) <u>Integrazione per scomposizione</u>

se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe definite su $[a,b]$ e hanno ivi primitiva $F(x)$ e $G(x)$ allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ una primitiva di $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è $\alpha F(x) + \beta G(x)$.

ES. 1) una primitiva di $x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ è

e in generale una primitiva del polinomio
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
è

ES. 2) una primitiva di $(\operatorname{tg} x)^2 = 1 + (\operatorname{tg} x)^2 - 1$ è

ES. 3) una primitiva di $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$

è ...

N.B. Per indicare l'insieme di TUTTE le primitive di $f(x)$ si usa scrivere $\int f(x)\,dx$: questa scrittura prende nome di <u>integrale indefinito di $f(x)$</u>

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = \{ F(x) + c \mid c \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x) \}$$

o più brevemente $= F(x) + c$

Esercizi. Calcolare:

$$\int \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx, \quad \int \frac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1}\,dx, \quad \int \frac{dx}{x^2 - 1}, \quad \int \frac{x^2 + 1}{x - 1}\,dx,$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$$

occhio al dominio

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^2}\, dx =$$

$$= \int \frac{\cancel{(\operatorname{sen} x)^2}}{\cancel{(\operatorname{sen} x)^2} (\cos x)^2}\, dx + \int \frac{\cancel{(\cos x)^2}}{(\operatorname{sen} x)^2 \cancel{(\cos x)^2}}\, dx =$$

$$= \operatorname{tg} x + \int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x)^2} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (\cos x)(\cos x)}{(\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{-[(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2]}{(\operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$= -1 - \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^2}$$