$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$$:

intervalli di continuità della funz. integranda?

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$: perché sia definita

In $(0,+\infty)$ è cont. poiché è rapp. di funz. cont. $\Longrightarrow$
Le primitive che calcoliamo sono da pensare def. su $(0,+\infty)$

$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx = 2\sqrt{x} + \ln|x| + c$$ e quindi

$$= 2\sqrt{x} + \ln x + c$$

$$\int \frac{3x^2+3x}{x^2-1}\,dx$$

l'integranda è definita per $x \neq \pm 1$ $\Longrightarrow$
Gli intervalli di continuità dell'integranda sono
$(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$

$$\frac{3x^2+3x}{x^2-1} = \frac{3x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \begin{cases} \dfrac{3x}{x-1} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x}{x-1}\,dx = 3\int \frac{x}{x-1}\,dx = 3\int \frac{(x-1)+1}{x-1}\,dx =$$

$$= 3\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx \underset{\substack{\text{Integro} \\ \text{per scomposizione}}}{=} 3\left(x+\ln|x-1|\right)+c$$

questa funzione la devo pensare: o definita in $(-\infty,-1)$: $3\left(x+\ln(1-x)\right)+c$

- definita in $(-1,1)$: $3(x + \ln(1-x)) + c$
- " in $(1,+\infty)$: $3(x + \ln(x-1)) + c$

$$\int \frac{dx}{x^2-1}$$

I.D. $x \neq \pm 1$

Intervalli di continuità:

$(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Riduco a den. comune:

$$\frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1} \equiv \frac{1}{x^2-1} \quad (\forall x \neq \pm 1)$$

$$\Updownarrow$$

$$(A+B)x + A - B \equiv 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A \\ 2A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1/2 \\ B=-1/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx + \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + c = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c}$$

Negli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$ le primitive han la forma $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+c$

Nell'intervallo $(-1,1)$ le primitive han la forma $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)+c$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx =$$

Intervalli di continuità: $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$

grado del Num $\geq$ grado del Denom $\Longrightarrow$ divido Num per Den.

$$= \int \frac{x^2+(-1+1)+1}{x-1}\,dx =$$

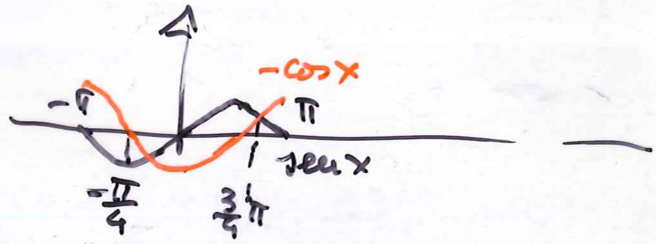
$$= \int \left[(x+1) + \frac{2}{x-1}\right] dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + c$$

da interpretare a seconda che serva una primitiva def. in $(-\infty, 1)$ o in $(1, +\infty)$

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx =$$

Def e continua su ogni intervallo in cui $\operatorname{sen} x + \cos x \neq 0$



$$= \int \frac{(\cos x)^2 - (\operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx =$$

attenzione: le 2 funzioni integrande non sono uguali poiché $\cos x - \operatorname{sen} x$ è definita su $\mathbb{R}$

$$= \int (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx =$$

$\Longrightarrow$ intervalli del tipo $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

$$= \operatorname{sen} x + \cos x + c$$

questa legge per rappresentare una primitiva di $\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ deve essere ristretta ad uno (opportuno: dipende dal problema) degli intervalli di continuità.

II. Integrazione per parti

Ricordo che $(fg)' = f'g + fg'$

$\Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$

usando la scomposizione

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{fattor finito}} \underbrace{g'(x)\,dx}_{\text{fattor differenziale} \dots = dg} = \underbrace{\int [f(x)g(x)]'dx}_{f(x)g(x)} - \int f'(x)g(x)dx$$

: COME SCEGLIERLI ?

ESEMPI

1) $\int \log_e x \, dx =$

2) $\int \cos^2 x \, dx =$

3) $\int x \cos x \, dx =$

4) $\int x e^x dx =$

5) $\int e^x \cos x \, dx =$ $\boxed{\text{2 VIE}}$

6) $\int x^\alpha \ln x \, dx =$ $\boxed{1^\circ \text{caso} : \alpha = -1}$

$\boxed{2^\circ \text{caso} : \alpha \neq -1}$

$$\int x e^x \, dx =$$

primitiva di e^x : e^x
deriv. di x : 1

primit. di x : $\frac{x^2}{2}$
deriv. di e^x : e^x

$$\int f g' \, dx = f g - \int f' g \, dx$$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$= x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx =$$
$$= x e^x - \int e^x \, dx =$$
$$= x e^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int x \cos x \, dx =$$

F.F. : x

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \operatorname{sen} x$

$$= x \operatorname{sen} x - \int 1 \cdot \operatorname{sen} x \, dx$$
$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

FARE LA PROVA: $(x \operatorname{sen} x + \cos x)' =$
$= 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cos x - \operatorname{sen} x = x \cos x$
O.K.

$$\int x^\alpha \ln x \, dx = \qquad \boxed{\alpha \neq -1}$$

FF : $\ln x$ $\quad (0, +\infty)$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$g'(x) = x^\alpha \Rightarrow g(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$
$$= \frac{\cancel{x}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha \, dx =$$
$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{\alpha+1} + c.$$

$\boxed{\alpha = -7}$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx =$$

per parti F.F. $\ln x$

F.D. $\frac{1}{x}dx$

$$= \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

La sol. dell'eq. in y : $y = A - y$ è $y = \frac{A}{2}$

Anche qui ($y = \int \frac{\ln x}{x}\,dx$):

$$\int \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

Verifica: $\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)' = \frac{1}{2}(2\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$$\int e^x \cos x\,dx =$$

FF: $\cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx =$$

FF: $\operatorname{sen} x$

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$= e^x \cos x + \left[e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx\right] =$$

$$= e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) - \int e^x \cos x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + c.$$

$$\int (\cos x)^2 \, dx =$$

$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \operatorname{sen} x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$$= \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx =$$

se cerco di procedere per parti nuovamente torno indietro!

$(\operatorname{sen} x)^2 = 1 - (\cos x)^2$

$$= \operatorname{sen} x \cos x + \left(\int 1 \, dx - \int (\cos x)^2 dx \right)$$

$$= \operatorname{sen} x \cos x + x - \int (\cos x)^2 dx$$

$$\Rightarrow \int (\cos x)^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x \cos x + x) + C$$

$$\Rightarrow \int (\operatorname{sen} x)^2 dx = \int (1 - (\cos x)^2) \, dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + C$$

III. Integrazione per sostituzione

Ricordo: $D(h(g(t))) = h'(g(t)) \cdot g'(t)$

Sia ora $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione continua di cui vogliamo trovare una primitiva H: $H'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

VERSIONE FACILE Se $f(x)$ ha la forma $h'(g(x)) \cdot g'(x)$ si ha

$$\int f(x)\,dx = \int h'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = h(g(x)) + c$$

e quindi $H(x) = h(g(x))$.

Esempi	Casi particolari:
1) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln\lvert g(x)\rvert + c$	ⓐ $\int \mathrm{tg}\,x\,dx =$
	ⓑ $\int \frac{x\,dx}{x^2+b^2} =$
2) $\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx = \mathrm{arctg}(g(x)) + c$	$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$

In generale cerco di riprodurre questa situazione con una SOSTITUZIONE $x = g(t)$

VERSIONE GENERALE: Sia $g: [c,d] \to [a,b]$ una funz. derivabile con derivata 1ª continua e $\neq 0$ su $[c,d]$.

(ciò garantisce che esiste $g^{-1}: [a,b] \to [c,d]$: PERCHÉ?)

Allora

$$\int f(x)\,dx = \Big[\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt\Big]_{t = g^{-1}(x)}$$

Infatti, se $H'(x) = f(x)$ $\int H'(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = H(g(t)) + c$ e la sostituzione $t = g^{-1}(x)$ riporta proprio a $H(x) + c$.

Esempi

1) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

2) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$\int \tan x \, dx =$$

intervalli di continuità:
$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

$b \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{x \, dx}{x^2+b} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+b} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+b| + c$$

Studiare in dipendenza da b gli interv. di continuità e quindi di def. della primitiva.

$$\int \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2} dx = \boxed{\begin{array}{l} g(x)=z \\ g'(x)dx = dz \end{array}}$$

$$= \int \frac{dz}{1+z^2} = \arctan g(x) + c$$

In particolare:

pol. 2° grado $\frac{\Delta}{4} = -1 < 0$
IRRIDUCIBILE

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx =$$

$$\int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \int \frac{(x+1)'}{1+(x+1)^2} dx =$$

$$= \arctan(x+1) + c$$

$$\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2}\,dx =$$

$\operatorname{sen} x = z$

$\cos x\, dx = dz$

$$= \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + c = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + c$$

Intervalli su cui sono definite le primitive: $(k\pi, (k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ poiché questi sono gli intervalli di continuità di $\frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2}$

$a \neq 0$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)}\,dx =$$

$t = \frac{x}{a}$ cioè $x = at$

$dx = a\,dt$

$$= \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan t + c =$$

$$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c.$$

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

sostituisco

A parte calcolo

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} + c$$

$\Delta < 0$