ESERCIZI nella ricerca di PRIMITIVE

(1)

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int (2x)\operatorname{sen}(x^2)\,dx =$$

$\boxed{\text{per sostituzione immediata}}$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos(x^2)\right) + c =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + c$$

(2)

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx \underset{\text{p.p. F.F. } x^2}{=}$$

$f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x$

$g'(x) = \operatorname{sen} x \to g(x) = -\cos x$

$\int f g'\,dx = fg - \int f' g\,dx$

$$= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx = \text{p.p. F.F. } 2x$$

$$= -x^2\cos x + 2\left[x\operatorname{sen} x - \int 1\cdot\operatorname{sen} x\,dx\right] =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left[x\operatorname{sen} x + \cos x\right] + c =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + c \quad, c\in\mathbb{R}$$

(3)

La cosa si generalizza agli integrali del tipo

$$\int x^n \cos x\,dx \qquad n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$\int x^n \operatorname{sen} x\,dx \qquad n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

④

$$\int x \,\underbrace{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int x\,(2\operatorname{sen} x \cos x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int x \operatorname{sen} 2x\, dx \quad = \quad \boxed{\begin{array}{l} f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = \operatorname{sen} 2x \rightarrow g(x) = \frac{-\cos 2x}{2} \end{array}}$$

↑ pp

$$\boxed{\int \operatorname{sen} 2x\, dx} \overset{?}{=} \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} t\, dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t + c = \underline{-\frac{1}{2}\cos 2x + c}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2}(\cos 2x) + \frac{1}{2}\int 1 \cdot \cos 2x\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right) + c =$$

$$= -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x + c$$

FARE LA PROVA.

---

⑤

$$\int x \cos 2x\, dx$$ IDEM come sopra.

(6)

$$\int x(\cos x)^2\,dx = ?$$

$$\cos 2x = (\cos x)^2 - (\operatorname{sen} x)^2 =$$
$$= 2(\cos x)^2 - 1$$

$$\Downarrow$$

$$(\cos x)^2 = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \int \frac{x}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\int (x\cos 2x\,dx)$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c$$

$c \in \mathbb{R}$

A parte calcolo

$$\int (x\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int 1\cdot \operatorname{sen} 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x\cdot\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

(7)

$$\int e^x (\operatorname{sen} x)^2 dx =$$

$$\cos 2x = 1 - 2(\operatorname{sen} x)^2$$

$$(\operatorname{sen} x)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^x (1-\cos 2x)\,dx =$$ per scomposizione

$$= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(1 - \frac{\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x}{5}\right) + c$$

$c \in \mathbb{R}$

Calcolo a parte

$$\int e^x \cos 2x\,dx \underset{\boxed{\text{p.p. F.F.}: \cos 2x}}{=} e^x\cos 2x + 2\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx =$$

$$= e^x \cos 2x + 2\left(e^x \operatorname{sen} 2x - 2\int e^x \cos 2x\,dx\right) =$$

$\boxed{\text{p.p. F.F.}: \operatorname{sen} 2x}$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x - 4\int e^x \cos 2x\,dx$$

$$\boxed{Y = A - 4Y \Rightarrow Y = \frac{A}{5}}$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{5}e^x(\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x) + c$$

$c \in \mathbb{R}$

(8) A CASA: $\int x e^{2x} dx$

⑨ $\int e^{-3x} \operatorname{sen} x \, dx =$ A CASA!

pp. F.F.: e^{-3x}

---

⑩ $\int \frac{x-1}{2x^2-4x+5} \, dx$

① grado Num < grado Den. OK.

② il num è la derivata del denom?

Den $= 2x^2-4x+5$

$(2x^2-4x+5)' = 4x-4$

Quasi!

$= \frac{1}{4} \int \frac{4x-4}{2x^2-4x+5} \, dx =$

$\int \frac{g'}{g} \, dx = \ln|g| + c$

$= \frac{1}{4} \ln |2x^2-4x+5| + c \quad , c \in \mathbb{R}.$

ATTENZIONE $2x^2-4x+5 = 2(x^2-2x+1)+3 > 0$

$\Rightarrow$ la funzione integranda è definita e continua su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ le sue primitive sono definite su $\mathbb{R}$ e le posso scrivere come

$\frac{1}{4} \ln (2x^2-4x+5) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(11) $$\int \frac{1}{2x^2-4x+5}\,dx$$

$\Delta(2x^2-4x+5)<0 \Rightarrow$ l'integrando sempre definita e continua

$$\parallel$$

$$\int \frac{1}{2(x-1)^2+3}\,dx = 3\int \frac{1}{\frac{2}{3}(x-1)^2+1}\,dx =$$

$$\underset{\boxed{\begin{array}{l} t=\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1) \\ x=\sqrt{\frac{3}{2}}t+1 \\ dx=\sqrt{\frac{3}{2}}\,dt \end{array}}}{=} 3\int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,dt}{t^2+1} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan t + c =$$

$$= 3\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)\right]+c$$

$c\in\mathbb{R}$

---

(12) $$\int \frac{dx}{x^2-4x-5} =$$

$\frac{\Delta}{4}(x^2-4x-5) = 4+5=9>0$

$(x+1)(x-5)$ è il denom.

$$= \int\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{6}\left(\ln|x-5|-\ln|x+1|\right)+c =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+c \quad , c\in\mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-5} = \frac{x(A+B)+B-5A}{(x+1)(x-5)}$$

$$\Longleftrightarrow x(A+B)+B-5A \equiv 1 \quad (\forall x\neq 5,-1)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-5A=1 \end{cases} \begin{cases} A=-B \\ 6B=1 \end{cases} \quad B=1/6 \quad A=-1/6$$

a seconda dell'intervallo di continuità di $\dfrac{1}{(x+1)(x-5)}$ avremo

3 tipi di primitive:

- Quelle def in $(-\infty, -1)$ che hanno la forma:

$$\frac{1}{6} \ln\left(\frac{x-5}{x+1}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

- Quelle def. in $(5, +\infty)$ che hanno la stessa forma
- Quelle def in $(-1, 5)$ che hanno la forma

$$\frac{1}{6} \log\left(\frac{5-x}{x+1}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

13

$$\int \arctan x \, dx =_{\text{pp. con}} \begin{array}{l} \text{F.F. } \arctan x \\ \text{F.D. } 1 \cdot dx \end{array}$$

$$= x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

Allo stesso modo si calcola $\int \ln x \, dx$: FARLO

11) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

12) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$

13) $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$

15) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$

16) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$ (SOST.)

17) $\int \frac{dx}{\cos x}$ (SOST.)

18) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} \, dx$ (SOST.)

19) $\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x} \, dx$

20) $\int \left(\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \right) dx$

21) $\int \frac{e^x \ln(2+e^x)}{(e^x+1)^2} \, dx$ (... FRATTE)

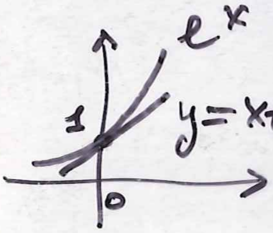
22) $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

STUDI di FUNZIONE

Calcolare l'eq. della retta tangente nel punto di ascissa $x=0$ ai grafici di

1) $f(x) = e^x$ $\qquad x=0 \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

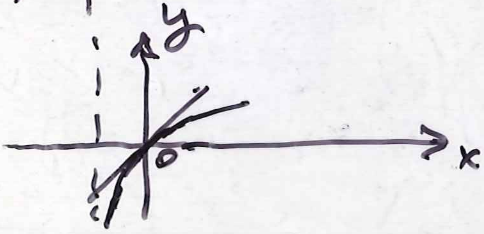


$\boxed{y-1 = 1(x-0)} \Rightarrow y = x+1$

approssimazione lineare di e^x è $1+x$

2) $f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad x=0 \Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$



$y-0 = 1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=x}$

3) $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad x=0 \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$\boxed{y=x}$

4) $f(x) = \cos x$ $\qquad x=0 \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = 0$

$\boxed{y=1}$

5) $f(x) = \tan x$ $\qquad x=0 \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = 1+\operatorname{tg}^2 x \Rightarrow f'(0) = 1$

$\boxed{y=x}$

6) $f(x) = \arctan x$ $\qquad x=0 \Rightarrow f(0) = 0 \ ; \ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\boxed{y=x}$

$f(x) = 4x - (x+1) \ln [(x+1)^2]$ Studiare.

I.D. $(x+1)^2 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

limiti negli estremi

$\lim_{x \to -1} f(x) = -4 - 2(x+1) \ln|x+1| \doteq [0 \cdot \infty] = -4$

per studiare $\lim_{x \to -1} (x+1) \ln|x+1| = \underset{x+1=t}{\text{sost.}}$

$= \lim_{t \to 0^\pm} t \ln|t| \underset{t=\frac{1}{z}}{=} \lim_{z \to \pm\infty} \frac{1}{z} \ln \frac{1}{|z|} =$

$= \lim_{z \to \pm\infty} \frac{-\ln|z|}{z} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} 4x - 2(x+1) \ln|x+1| = \lim_{x \to +\infty} 4x - 2x \ln(x) =$

$= [\infty - \infty] = \lim_{x \to +\infty} 2x(2 - \ln x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4x - 2x \ln(-x) =$

$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{-2x}_{\downarrow\, +\infty} (\underbrace{\ln(-x)}_{\downarrow\, +\infty} - 2) = +\infty$

Monotonia: $f'(x) = 4 - \left(\ln(x+1)^2 + \underbrace{(x+1) \frac{2(x+1)}{(x+1)^2}}_{=2} \right)$

$= 2 - \ln(x+1)^2$

$f'(x) = 2 - \ln(x+1)^2 \geq 0$

$\ln(x+1)^2 \leq 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \leq e^2 \Leftrightarrow -e \leq x+1 \leq e \\ x \neq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-e-1, e-1) \\ x \neq -1 \end{cases}$

$f(x)$ cresce in $(-e-1,-1)$ e in $(-1, e-1)$

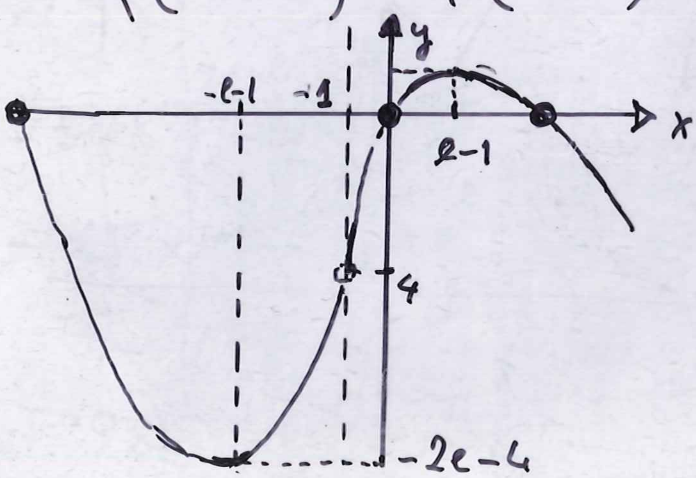
$f(x)$ decresce in $(-\infty, -e-1)$ e in $(e-1, +\infty)$

$\vee \quad \wedge$

$f(x)$ ha un min. rel in $x=-e-1$
MAX rel in $x=e-1$

$f(e-1) = 4(e-1) - (e-1+1)\ln(e-1+1)^2 =$
$= 4(e-1) - 2e\ln e = 2e-4 > 0$

$f(-e-1) = 4(-e-1) + 2e\ln e = -2e-4 < 0$



N.B. $f(0) = 0 - 1\cdot\ln 1 = 0$

$f(-e^2-1) = -4e^2-4 + e^2\ln(e)^4 = -4 < 0$

$f(-e^3-1) = -4e^3-4 + e^3\ln e^6 = 2e^3-4 > 0$

uno zero sta tra $-e^3-1$ e $-e^2-1$

$f(e^2-1) = 4e^2-4 - e^2\ln(e^4) = -4 < 0$

uno zero è tra $e-1$ e e^2-1.

Concludendo: Visto che la funzione

per $x \to -\infty$ tende a $+\infty$, mentre $f(-e-1)<0$

e nell'intervallo $(-\infty, -e-1)$ è monotona (decrescente)

in tale intervallo ammette certamente uno e un sol zero α

(che abbiamo verificato cadere nell'intervallo

$(-e^3-1, -e^2-1)$)

Visto che

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -4 < 0$ (e quindi in un punto $-1+\varepsilon$ abbastanza vicino a -1 la funzione è <0 ; permanenza del segno)

e $f(e-1)>0$ e visto che in $(-1, e-1)$ la funz è crescente

in tale intervallo la funzione ha 1 e 1 sol zero

che abbiamo visto essere in $x=0$

Visto che

$f(e-1)>0$ mentre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e visto che in

$(e-1, +\infty)$ la funzione è decrescente, in tale intervallo

ammette uno e un solo zero β ; che abbiamo

visto cadere nell'intervallo $(e-1, e^2-1)$

Di conseguenza

$f(x)>0$ per $x \in (-\infty, \alpha)$ e per $x \in (0, \beta)$

$f(x)<0$ per $x \in (\alpha, -1)$ e per $x \in (-1, 0)$ e per $x \in (\beta, +\infty)$,