Studiare

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-4}$$

I.D. $x^2-4 \neq 0$: $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

$f(x)$ è continua su ciascuno dei 3 intervalli? Sì essendo rapporto di funz. cont. (con Den $\neq 0$)

ZERI $f(x)=0 \iff x=1$

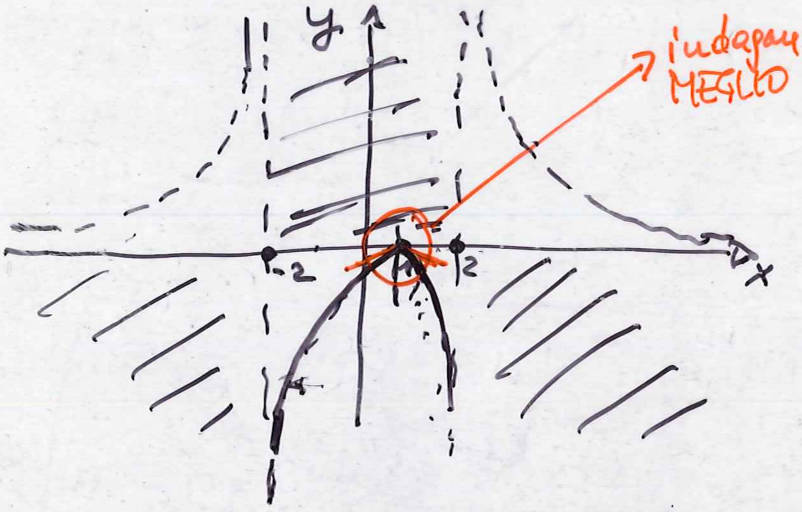
SEGNO : Num ≥ 0 $\forall x \in$ I.D.

Den > 0 $\forall x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

$f(x) > 0$ in $(-\infty,-2)$ e in $(2,+\infty)$

$f(x) < 0$ in $(-2,1)$ e in $(1,2)$

$f(x) = 0$ in $x=1$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x^2-4} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-4} = 0^+$$

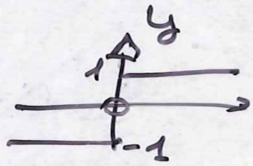
per $x \to \pm\infty$ asintoto orizzontale $\boxed{y=0}$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{1-x}{x^2-4} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\to$ asint. vert. $x=-2$, $x=2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-4} & \text{se } x \geq 1,\ x \neq 2 \\[2ex] \dfrac{1-x}{x^2-4} & \text{se } x < 1,\ x \neq -2 \end{cases}$$

(Volendo: $|t|' = \operatorname{sgn} t \quad \forall t \neq 0$ )

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4-(x-1)2x}{(x^2-4)^2} & \text{se } x > 1 \text{ e } x \neq 2 \\[2ex] \dfrac{x^2-2x+4}{(x^2-4)^2} & \text{se } x < 1 \text{ e } x \neq -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-2x+4}{(x^2-4)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$x = 1$ è un punto angoloso!

Segno di f'

$\boxed{(1,2) \text{ o } (2,+\infty)}$ $\quad \dfrac{-x^2+2x-1-3}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-(x-1)^2-3}{(x^2-4)^2} < 0$

$\Rightarrow$ f decresce in $(1,2)$ e in $(2,+\infty)$

$\boxed{(-\infty,-2) \text{ o } (-2,1)}$ $\quad \dfrac{(x^2-2x+1)+3}{(x^2-4)^2} > 0$

$\Rightarrow$ f cresce in $(-\infty,-2)$ e in $(-2,1)$

Concavità? In $(-\infty,-2)$ o $(-2,1)$

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2x+4}{(x^2-4)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x^2-4)^{\cancel{2}} - (x^2-2x+4)2\cancel{(x^2-4)}2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2-4)-4x(x^2-2x+4)}{(x^2-4)^3} = \frac{2(x^3-x^2-4x+4-2x^3+4x^2-8x)}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{2(-x^3+3x^2-12x+4)}{(x^2-4)^3} \geq 0$$

$\boxed{\text{il denom. è} > 0 \text{ in } (-\infty,-2) \text{ e } < 0 \text{ in } (-2,1)}$

$$\begin{cases} x^3-3x^2+12x-4 \leq 0 & \text{certo vero } \forall x \leq 0 \\ x \in (-\infty,-2) \cup (-2,1) \end{cases}$$

Per studiare in generale la diseq. studio la funzione $x^3-3x^2+12x-4 = p(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$$

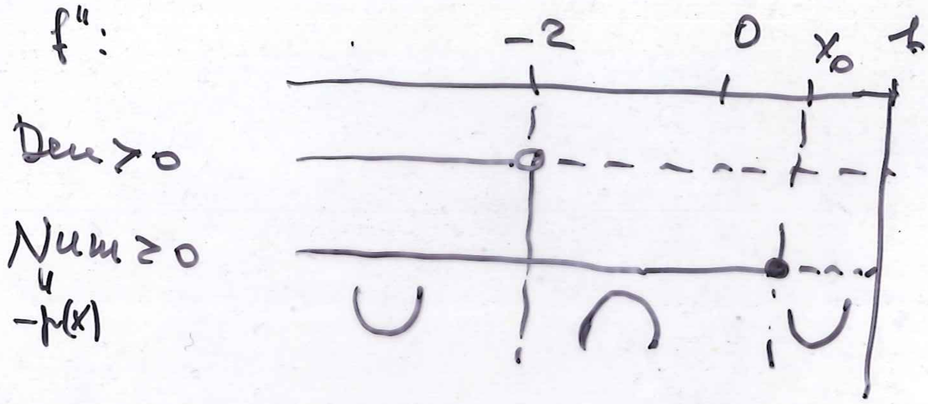
$p'(x) = 3x^2-6x+12 = 3(x^2-2x+4) > 0$ Sempre!

$p(x)$ cresce su tutto $\mathbb{R}$.

$p(0) = -4 < 0$ $\quad p(1) = 1-3+12-4 > 0$

Teor. degli zeri $\Rightarrow \exists x_0 \in (0,1)$ in cui $p(x_0) = 0$

$p(x)$ cresce $\Rightarrow p(x) < 0 \ \forall x < x_0$ ed è > 0 in $(x_0, 1)$

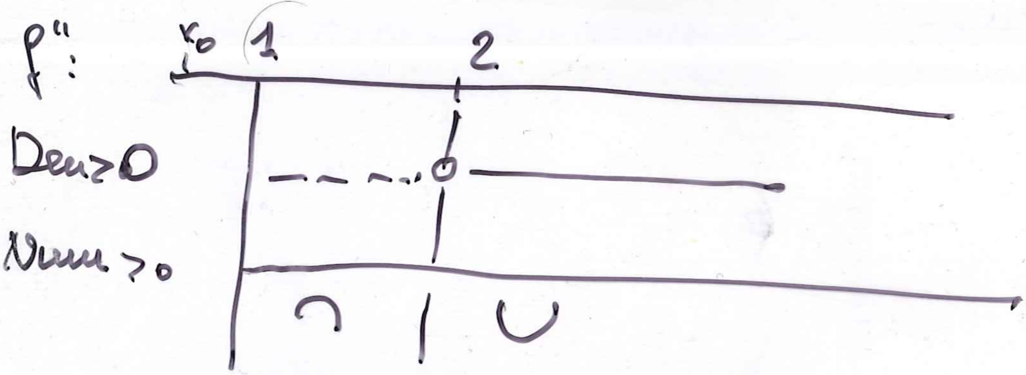


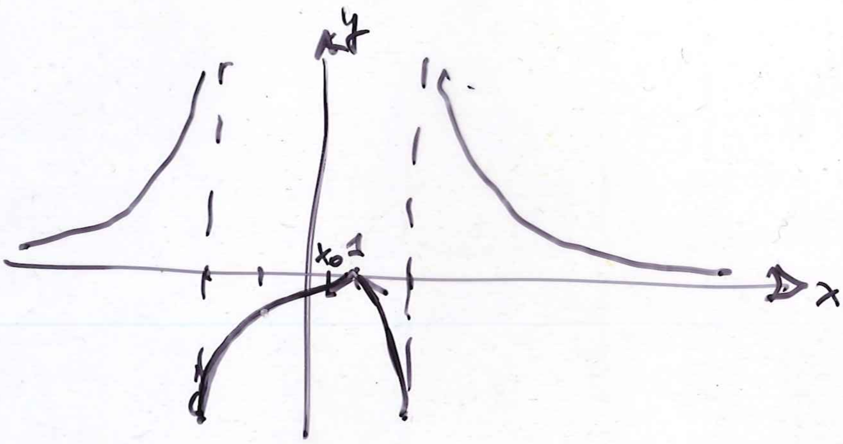
flesso in $x = x_0$

in $(1,2)$ e in $(2,+\infty)$

$$f''(x) = \frac{2(x^3-3x^2+12x-4)}{(x^2-4)^3}$$

Num = $p(x)$





(Studio grafico): ci si poteva arrivare anche così:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 12x - 4 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 = 4 - 12x$$

c'è 1 intersezione tra 0 e 1 tra il grafico di x^3-3x^2 e quello di $4-12x$. Ma bisogna far bene la figura

$f(x) = x\, e^{1/x}$

1) $x \neq 0$ perché sia definito l'esponente

$\Rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f(-x) = -x e^{\frac{1}{-x}} \neq -f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} x e^{1/x} = +\infty$ asintoto obliquo ?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1^+ = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x \to +\infty} x\,(e^{1/x} - 1) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \underset{\boxed{\frac{1}{x} \to 0^+}}{=} 1 = q$$

asintoto per $x \to +\infty$ $\boxed{y = x + 1}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty$ asint. obl. ?

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1^- = m$$

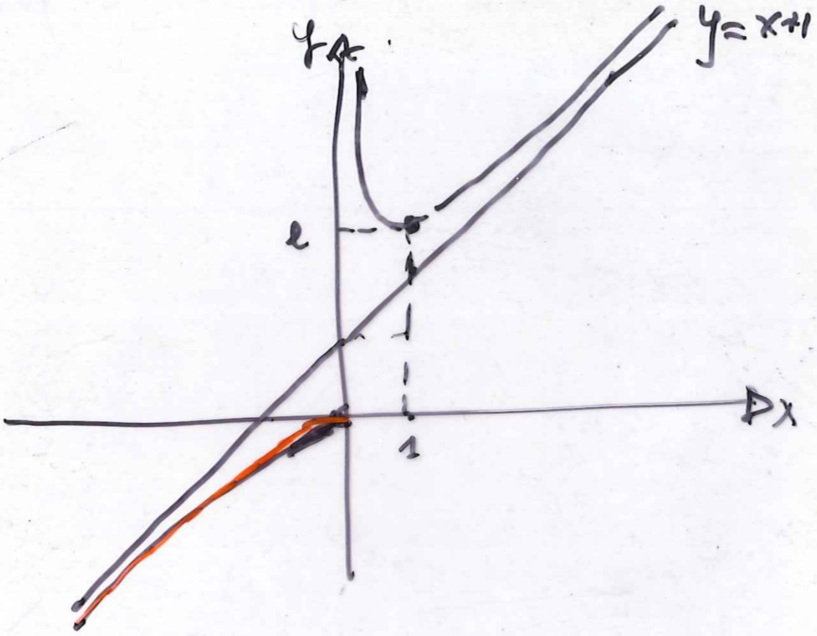
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x \to -\infty} x\,(e^{1/x} - 1) \underset{\boxed{\frac{1}{x} \to 0^-}}{=} 1$$

asintoto per $x \to -\infty$ $\boxed{y = x + 1}$

$\lim_{x \to 0^-} x e^{1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$

$\lim_{x \to 0^+} x\, e^{1/x} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} \underset{\frac{1}{x} \to +\infty}{=} +\infty$

asint. vert. $x = 0$



$$f(x) = x e^{1/x}$$

$$f'(x) = e^{1/x} + x \cdot e^{1/x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) =$$

$$= e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= e^{1/x} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$e^{1/x} > 0 \quad \forall x \in I.D.$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{x-1}{x} \geq 0 \iff$$

$x \in (-\infty, 0)$ oppure $x \in [1, +\infty)$

$f(x)$ cresce in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$

$f(x)$ ha min rel. in $x = 1$ $\quad f(1) = e$

$f(x)$ decresce in $(0, 1)$

Domande lecite!

1) come tende a 0^- la $f(x)$?

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} \cdot \frac{x-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^{1/x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\underset{\boxed{y = -\frac{1}{x}}}{=} \lim_{y \to +\infty} y \cdot e^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

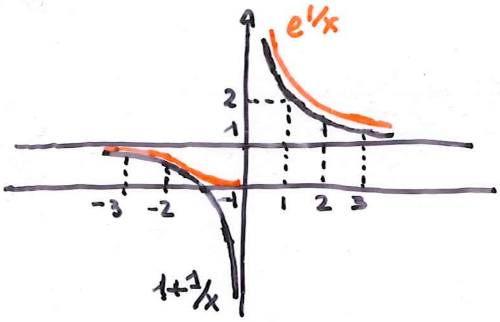
2) Il grafico attraversa gli asintoti?

$f(x) = x + 1$?

$$x e^{1/x} = x + 1$$

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x}$$

Come sono "messi" i due grafici di $1+\frac{1}{x}$ e e^x?



x	$1+1/x$	$e^{1/x}$
1	2	e
2	$1+1/2$	$e^{1/2}$
3	$1+1/3$	$e^{1/3}$
-1	0	e^{-1}
-2	$1-1/2$	$e^{-1/2}$
-3	$1-1/3$	$e^{-1/3}$
$1/2$	3	e^2

$e^{1/2} > 3/2$ poiché $e > 9/4$

$e^{1/3} > 4/3$ poiché $e > 64/27$

$e^{-1/2} > 1/2$ poiché $e < 4$

$e^{-1/3} > 2/3$ poiché $e < 27/8$

"Un po' a spanne" si può ipotizzare che i grafici siano come quelli rappresentati sopra (e quindi $e^{1/x} > 1+1/x$ $\forall x \in$ I.D.)
Ma in realtà non abbiamo certezze!
Invece osservo che

$$f'(x) = e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f''(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

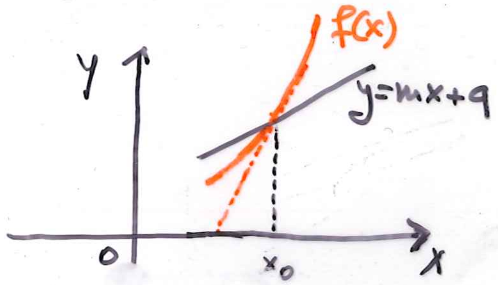
$$= e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^3} \Rightarrow$$

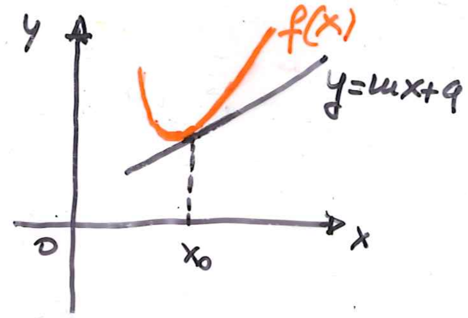
$\Rightarrow$ $f''(x) > 0$ per $x > 0$ $\Rightarrow$ in $(0,+\infty)$ $f(x)$ è convessa
$f''(x) < 0$ per $x < 0$ $\Rightarrow$ in $(-\infty,0)$ $f(x)$ è concava

e <u>non ci sono punti di flesso</u>.
Questo fa sì che non ci possano essere intersezioni tra asintoti e grafico.
Vediamo il perché in generale.
Sia $f: (a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $(a,+\infty)$ e convessa in $(a,+\infty)$ dotata di un asintoto obliquo $y = mx+q$.
È ovvio che (SIGNIF. GEOM. della derivata)

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m$$

Ma $f'(x)$ è crescente (poiché $f(x)$ è convessa) $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x) \leq m}$
Questa condizione non è certo soddisfatta se l'intersezione grafico-asintoto ha una delle due forme!





in cui la tangente al grafico nel punto di intersezione ha coefficiente angolare $\geq m$.

D'altra parte, se tale coefficiente è $< m$ (come nella

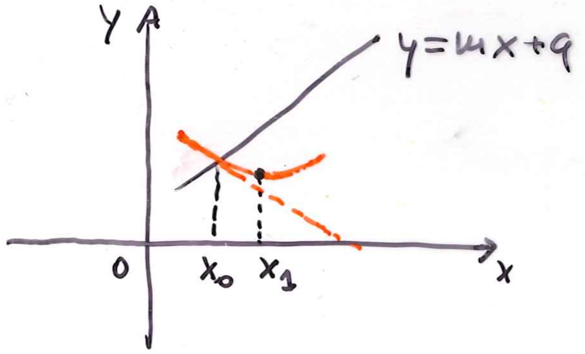


figura in cui è addirittura $< 0 < m$) esiste un $x_1 > x_0$ in cui

$$f(x_1) < mx_1 + q$$

(cioè "il grafico giace sotto l'asintoto") e quindi

$$f(x_1) = mx_1 + q - k^2 \quad \text{con } k \text{ reale } \neq 0.$$

Considero $x_2 > x_1$: allora, per il teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[x_1, x_2]$ (su cui f è continua essendo derivabile in tutti i punti di $(a, +\infty)$ che contiene $[x_1, x_2]$) esiste $c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$\boxed{\text{Se } \forall c > x_1 \text{ si ha } f'(c) \leq m}$

$$f(x_2) - f(x_1) \leq m(x_2 - x_1)$$

cioè

$$f(x_2) \leq f(x_1) + m(x_2 - x_1) = mx_1 + q - k^2 + mx_2 - mx_1 =$$
$$= mx_2 + q - k^2.$$

Ma allora (PERM. SEGNO)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) \leq \lim_{x \to +\infty} (mx + q - k^2) - (mx + q) = -k^2 < 0$$

cioè $\boxed{y = mx + q \text{ non è un asintoto di } f(x) \text{ per } x \to +\infty}$

8.1.15

$$\int \frac{(x+1)^2}{3x}\,dx =$$

: specificare gli intervalli massimali di def. delle primitive, MOTIVANDO

Sono 2: $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ (intervalli di continuità dell'integrando)

$$\frac{1}{3}\int \frac{x^2+2x+1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|\right)+c$$

(8.2.3)

$(-\infty, 2/3)$ e $(2/3, +\infty)$

$$\int \frac{1}{2-3x}\,dx = -\int \frac{dx}{3x-2} = -\frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{3x-2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|3x-2| + c$$

(8.2.6)

$\boxed{\mathbb{R}}$

$$\int 4^{2x}\,dx = \int 16^x\,dx = \frac{16^x}{\ln 16} = \frac{16^x}{4\ln 2} = \frac{4^{2x}}{4\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot 4^{2x-1} + c$$

(8.2.11) $$\int \frac{5}{\sqrt[3]{2-x}}\,dx =$$

$\boxed{x>2}$

$$= 5\int \frac{dx}{(2-x)^{1/3}} = -5\int -(2-x)^{-1/3}dx = -5\,\frac{(2-x)^{2/3}}{2/3}+c = -\frac{15}{2}(2-x)^{2/3}+c$$

(8.3.1)

$$\int (2x+e^x)(x^2+e^x)^5\,dx = \left| \begin{array}{l} g(x)=x^2+e^x \\ \int g' g^5\,dx = \frac{g^6}{6}+c \end{array} \right.$$

$$= \frac{(x^2+e^x)^6}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(8.2.10)

$$\int e^{3x-5}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x-5} + c$$

Eventualmente: $e^{3x-5} = e^{3x} \cdot e^{-5}$

$$e^{-5} \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{-5} e^{3x}}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$