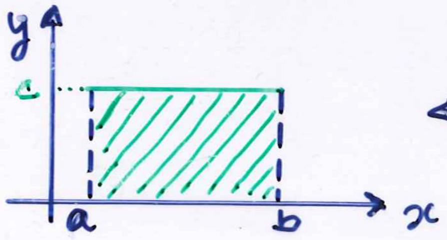
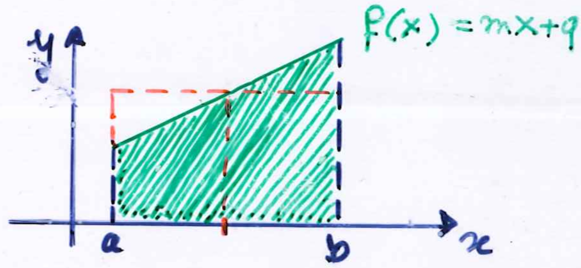
Integrale Definito (versione Cauchy-Riemann)

Come calcolare l'area di una figura mistilinea?
(o, corrispondentemente, come calcolare il LAVORO di una FORZA variabile nel tempo nello spostamento lungo una retta ... e analoghi problemi fisici?).

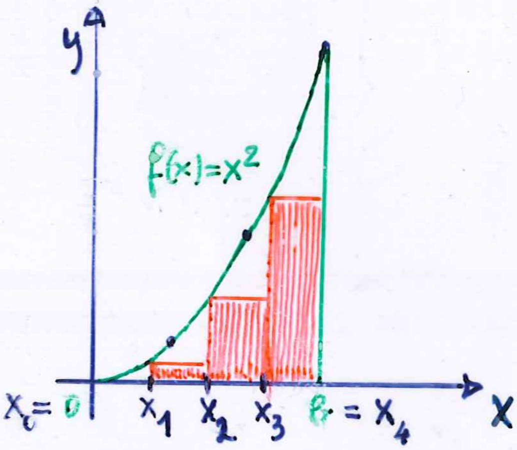
Cominciamo dal facile:



$\leftarrow \mathcal{A} = (b-a)\cdot|c|$



$$\mathcal{A} = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \longrightarrow$$



$\boxed{n=4}$

METODO DI ESAUSTIONE

$\mathcal{A} \approx S_n$ = somma dell'area dei rettangoli di base $\frac{b-a}{n}$ e altezze: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$

Approssimazione per difetto.

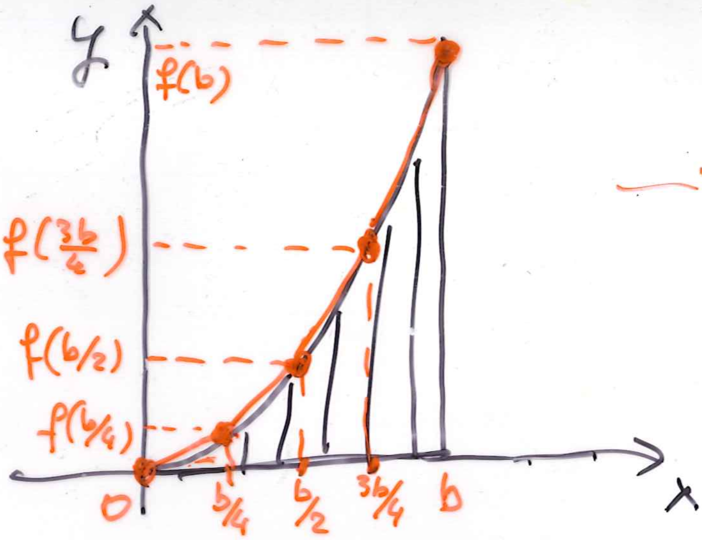
Se la si vuole per eccesso prendere come altezze $f(x_1), \dots, f(x_n)$.

$$S_4 = \frac{b}{4}\left(0^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{3b}{4}\right)^2\right) = \frac{b}{4}\cdot\frac{b^2+4b^2+9b^2}{4^2} = \frac{b^3}{4^3}\cdot(1+4+9)$$

$$S_n = \frac{b}{n}\left(0^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \dots + \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2}\right) = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

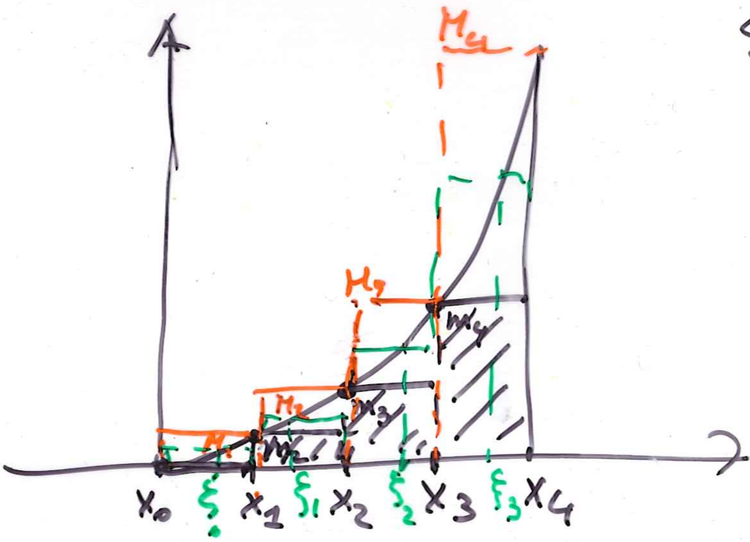
Si sa:
$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

Se suddivido sempre più finemente posso pensare
$$\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{3}$$



→ Metodo dei TRAPEZI: approssimo il grafico con la spezzata che congiunge alcuni suoi punti.

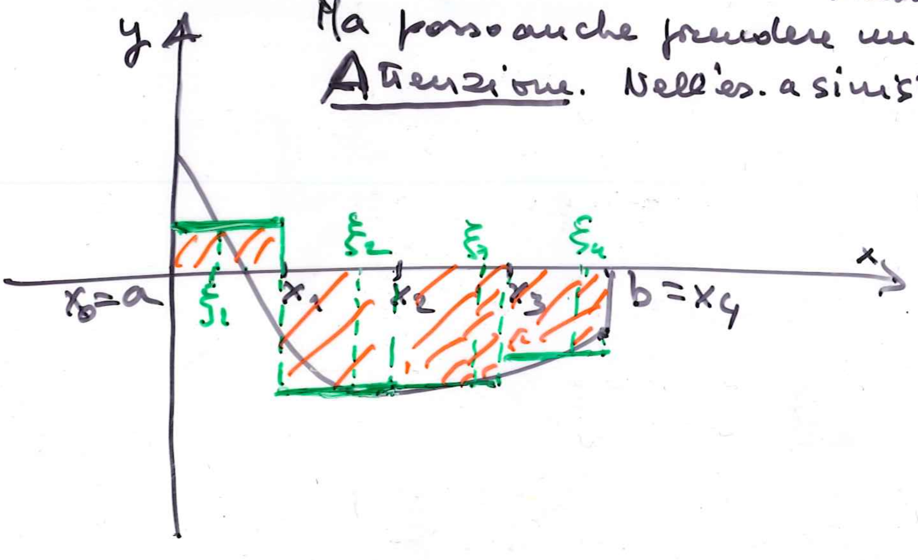
Altra approssimazione.
Sia f continua su $[a,b]$
$\Longrightarrow$ (WEIERSTRASS)
$\exists$ min m
$\exists$ max M
assoluti



approssimo per eccesso prendendo su ogni intervallo il valore MAX e per difetto prendendo su ogni intervallo il valore minimo.

ξ csi' ξ

Ma posso anche prendere un valore intermedio: $f(\xi_i)$
Attenzione. Nell'es. a sinistra:



$f(\xi_2) < 0$

$f(\xi_3) < 0$

$f(\xi_4) < 0$

inoltre:

$|f(\xi_i)| > f(\xi_1)$

$\forall i = 2,3,4$

$$S_4 = \frac{(b-a)}{4}\left(f(\xi_1)+f(\xi_2)+f(\xi_3)+f(\xi_4)\right) < 0 :$$

S_4 non misura l'area della regione tratteggiata in rosso

In generale, definisco un ente nuovo che servirà per calcolare le aree MA NON SEMPRE IN MANIERA AUTOMATICA

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

- divido $[a,b]$ in n parti <u>uguali</u> (non fondamentale, ma rende i conti + facili) di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$

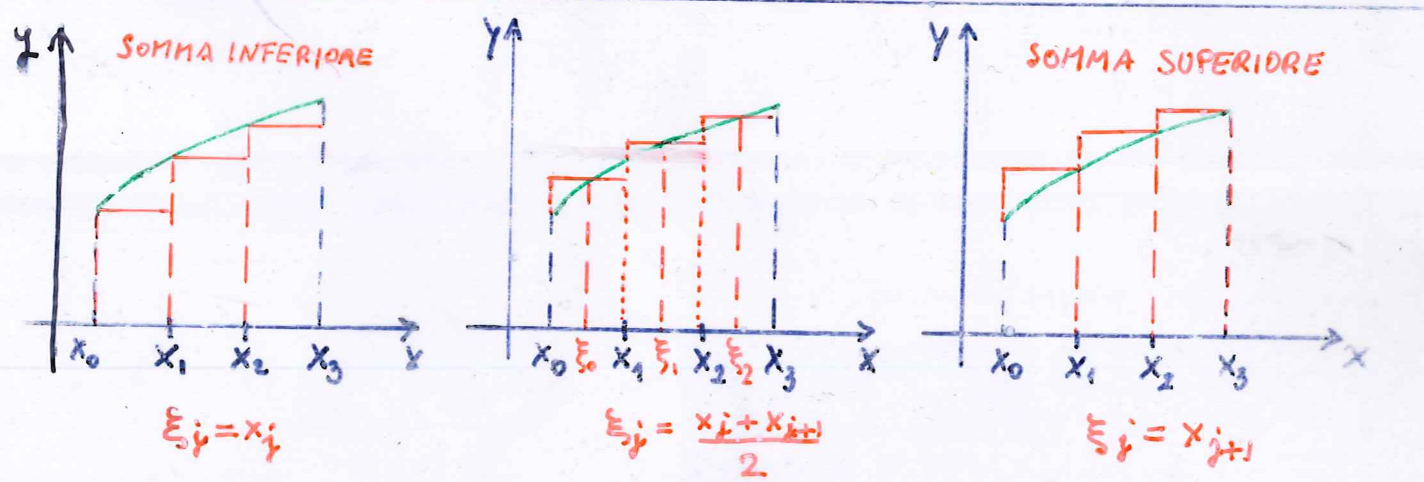
  Cioè considero in $[a,b]$ i punti

  $$x_0 = a \,,\; x_1 = a+h \,,\; x_2 = a+2h, \dots ,\; x_{n-1} = a+(n-1)h \,,\; x_n = b$$

- in ogni intervallo $[x_0, x_1], \dots , [x_j, x_{j+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ scelgo un punto $\xi_0 , \dots , \xi_j , \dots , \xi_{n-1}$
  (anche un estremo, se voglio)
- Calcolo

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\underbrace{(x_{j+1}-x_j)}_{h} = h \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) = (b-a)\,\frac{\sum f(\xi_j)}{n} = S_n$$

SOMMA di CAUCHY-RIEMANN



Tre diverse somme di Cauchy-Riemann

Si dimostra che esiste finito

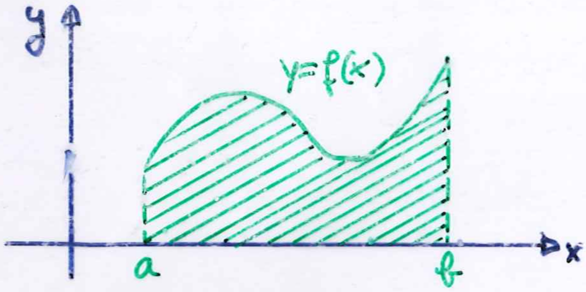
$$\lim_{n \to \infty} S_n$$

e che tale limite è indipendente dalla scelta dei ξ_j.
Esso è detto <u>integrale definito</u> della funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e denotato

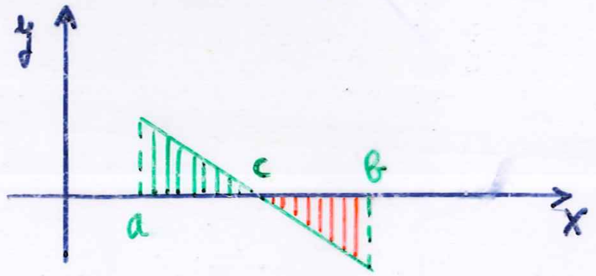
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Interpretazione geometrica

Se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area del TRAPEZOIDE racchiuso tra $y=f(x)$, l'asse x e le rette $x=a$, $x=b$

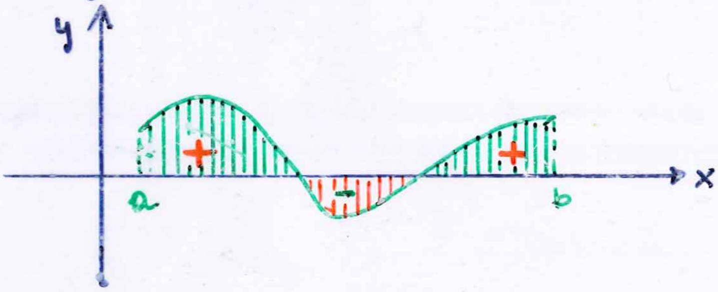


Ma se $f(x)$ cambia segno questo non è più vero



qui $\int_a^b f(x)dx = 0$ mentre l'area no

Cioè l'integrale è la somma delle aree prese con il segno + se la regione sta sopra l'asse x e con il segno − se la regione sta sotto l'asse x



Per il calcolo delle aree VEDI DOPO.

Proprietà

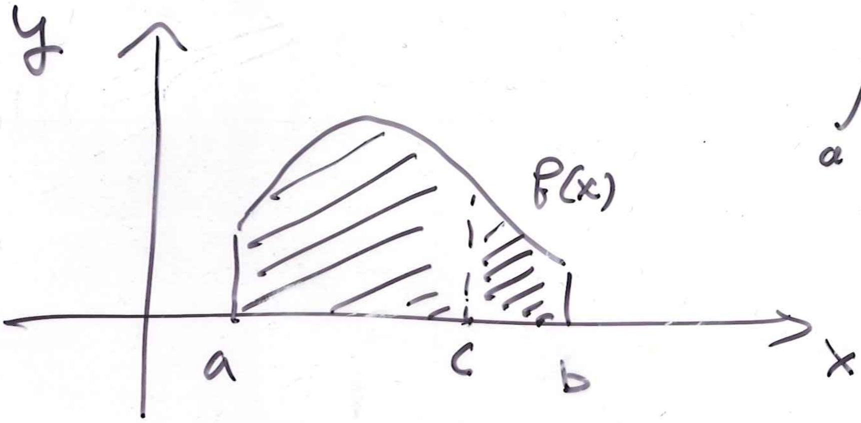
1. Additività degli intervalli di integrazione

$$\forall c \in [a,b] : \quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

E' possibile generalizzare a un c esterno all'intervallo (purché f sia continua in $[c,b]$ se $c<a$
in $[a,c]$ se $c>b$)

definendo $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx$

ADDITIVITÀ degli INTERV. di INTEGRAZIONE



$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

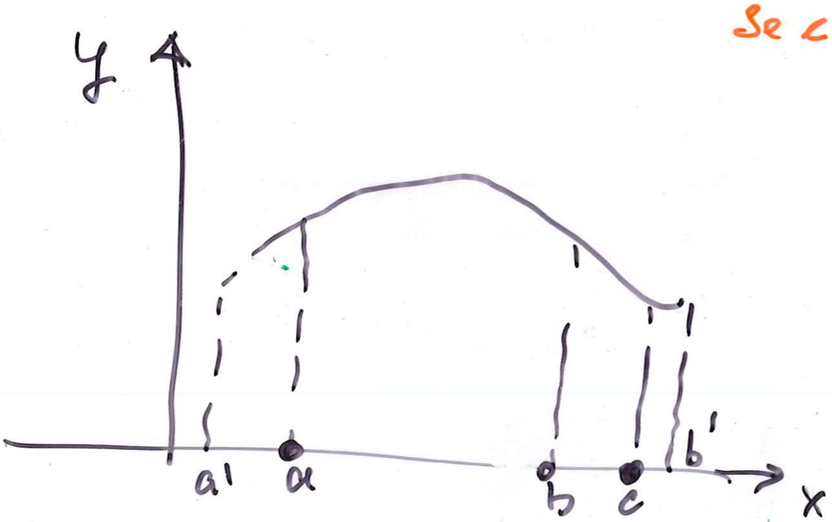
pensato su $f(x) \geq 0$ è ragionevole!

Sia $f : [a', b'] \to \mathbb{R}$ cont. in $[a', b']$

e sia $[a, b] \subseteq [a', b']$ e $c \in [a', b']$. È ancora

vero $\int_a^c f(x)\,dx + \boxed{\int_c^b f(x)\,dx} = \int_a^b f(x)\,dx$?

Se $c > b$ che cosa significa $\int_c^b f(x)\,dx$?



Osservo che b è interno ad $[a, c]$ e quindi:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \implies$$

$$\implies \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \boxed{- \int_b^c f(x)\,dx}$$

allora se $c > b$ definisco $\int_c^b f(x)\,dx$ come $-\int_b^c f(x)\,dx$

... e la formula vale

Ancora:

$$\int_a^a f(x)\,dx + \underline{\int_a^b f(x)\,dx} = \underline{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$\Longrightarrow$

DEF: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Funzione integrale.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. in $[a,b]$

sia $c \in [a,b]$. Allora è definito

$$\int_c^z f(x)\,dx \qquad \forall z \in [a,b]$$

e varia al variare dell'estremo z

cioè è una funzione di z.

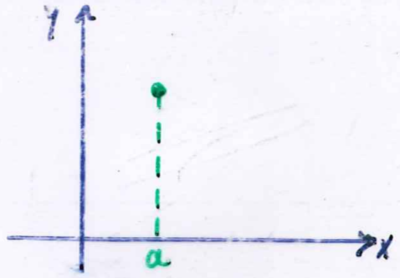
La chiamo funzione integrale di $f(x)$

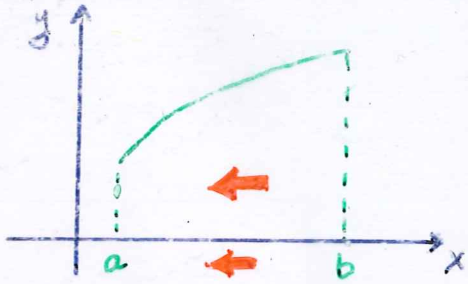
con estremo di integraz. fissato c e estremo

z variabile in $[a,b]$ e la denoto:

$$F(z) = \int_c^z f(x)\,dx.$$

proprietà immediata: $F(c) = 0$





2. Additività rispetto alle funzioni

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3. Omogeneità

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Positività

$\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \qquad$ se $a<b$

5. Conservazione del verso delle disuguaglianze

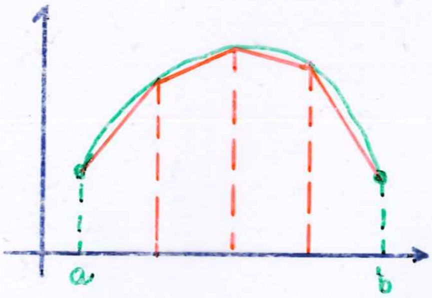
$\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

6. Proprietà "triangolare"

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Calcolo di integrali definiti

1. METODI NUMERICI. Per calcolare un'approssimazione dell'integrale piuttosto che usare somme superiori e inferiori è meglio usare il metodo dei TRAPEZI che consiste nel prendere ξ_i in modo che $f(\xi_i)$ sia $\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$



(la funzione f è CONTINUA: vale il teorema dei valori intermedi) cioè nell'approssimare il grafico con segmenti che ne congiungono n+1 punti:

Allora

$$\bar{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right)$$

È come pesare $\frac{1}{2}$ sugli estremi e 1 nei punti interni

Poiché $\bar{S}_n \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$ si può approssimare l'integrale con la precisione voluta.

Ci sono anche altri metodi più sofisticati che convergono più velocemente (Cavalieri - Simpson ad es.).

2. METODO ESATTO.

Suppongo di essere in grado di calcolare una primitiva $G(x)$ della funzione integranda $f(x)$ in $[a,b]$:

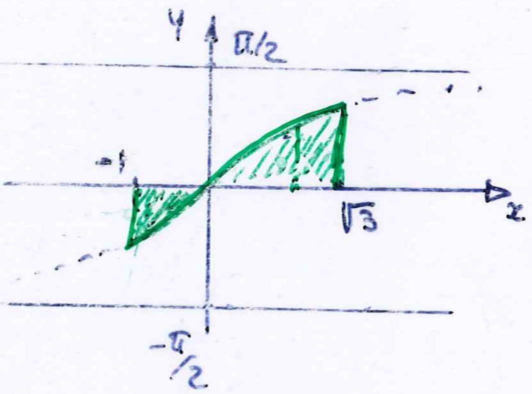
$$G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Dunque per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$

- cerco una primitiva $G(x)$ di $f(x)$
- calcolo $G(b)$ e $G(a)$
- sottraggo: $G(b)-G(a)$

ES. Calcolare $\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx$

ES. Calcolare $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$



ES. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di arctg x e l'asse x nell'intervallo $[-1,\sqrt{3}]$

$$\int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx = G(1)-G(0)$$

Calcolo una primitiva $G(x)$

$$\int \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx = \quad \boxed{(4e^x+2x^2-1)' = 4e^x+4x}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4e^x+4x}{4e^x+2x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4e^x+2x^2-1|+c$$

$$G(x) = \frac{1}{4}\ln|4e^x+2x^2-1|$$

$$G(1) = \frac{1}{4}\ln|4e+2-1| = \frac{1}{4}\ln(4e+1)$$

$$G(0) = \frac{1}{4}\ln|4+0-1| = \frac{1}{4}\ln 3$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^x+x}{4e^x+2x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\left(\ln(4e+1)-\ln 3\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4e+1}{3}\right)$$

$$\int_{-1}^{1/2} \arcsin x \, dx$$

Calcolo l'integrale INDEFINITO corrispondente

$$\int \arcsin x \, dx = \int \underbrace{\arcsin x}_{F.F.} \cdot \underbrace{1 dx}_{F.D.} =$$

$$= x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \qquad \boxed{(1-x^2)' = -2x}$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \qquad \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ (-2x)\, dx = dt \end{array}$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \left[\int \frac{dt}{\sqrt{t}} \right]_{t=1-x^2} = \qquad \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C$$

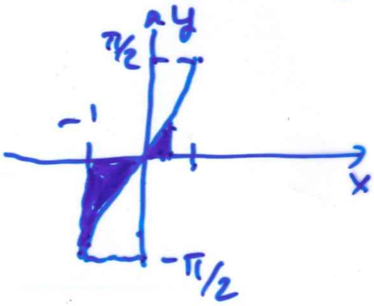
$$= \underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}} + C \qquad = G(x) + C$$

$$\int_{-1}^{1/2} (\arcsin x \, dx) = G(\tfrac{1}{2}) - G(-1) =$$

$$= \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right]_{-1}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} + \sqrt{1-\frac{1}{4}} - \left(-1 \arcsin(-1) + \sqrt{1-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$



Se voglio l'area devo calcolare

$$\int_{-1}^{1/2} |\arcsin x| \, dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} -\arcsin x \, dx + \int_{0}^{1/2} \arcsin x \, dx =$$

$$= -\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{0} + \left[x \arcsin x + \sqrt{1+x^2}\right]_{0}^{1/2} =$$

$$= -\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} - 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

Idem con $\arctan x$ in $[-1, \sqrt{3}]$

Integrale indefinito:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Integrale definito tra -1 e $\sqrt{3}$ di $\arctan x$ è:

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_{-1}^{\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{3} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln 4 - \left(-\arctan(-1) - \frac{1}{2} \ln 2\right) =$$

$$\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - \ln 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{4\sqrt{3} - 3}{12} \pi - \frac{1}{2} \ln 2$$

Area della regione di piano compresa tra il grafico di $\arctan x$, l'asse x e le rette $x = -1$ e $x = \sqrt{3}$ è

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} |\arctan x| \, dx = \int_{-1}^{0} \arctan x \, dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx =$$

$$= -\left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_{-1}^{0} + \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_{0}^{\sqrt{3}} =$$

$$= -\left(-\left(-\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \ln 2\right)\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2 =$$

$$= \frac{4\sqrt{3} + 3}{12} \pi - \frac{3}{2} \ln 2$$