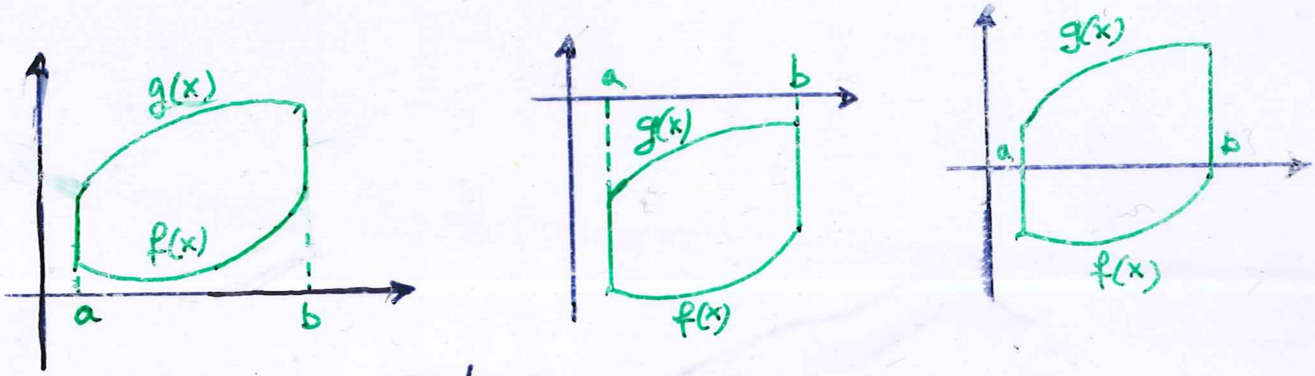
In generale per calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici di 2 funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{in } [a,b]$$

e le rette $x=a$, $x=b$, CALCOLARE

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$



eccetera ...

Se i 2 grafici si intersecano corrispondentemente a $x=c$ e
$g(x) \geq f(x)$ per $x \in [a,c]$
$g(x) \leq f(x)$ per $x \in [c,b]$

Calcolare

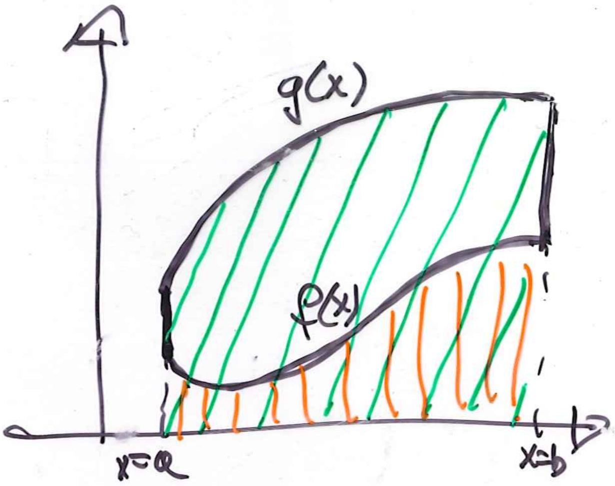
$$\int_a^c (g(x)-f(x))\,dx + \int_c^b (f(x)-g(x))\,dx$$

Altri ESEMPI (AREA di REGIONI SIMMETRICHE)

1. Calcolare l'area del trapezoide delimitato dall'asse x e dalla funzione $f(x)=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$ nell'intervallo $[-1,1]$.

2. Calcolare l'area della regione di piano compresa tra $y=x^3$ e $y=x^5$ nell'intervallo $[-1,1]$.
COSA CAMBIA se scelgo l'INTERVALLO $[-1,2]$?

1ª



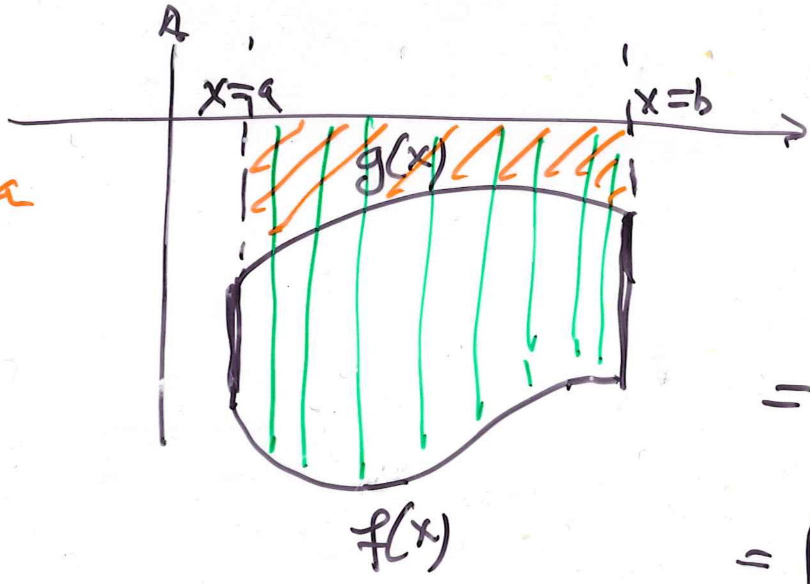
$g(x) \geq f(x)$

Area regione

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

2ª

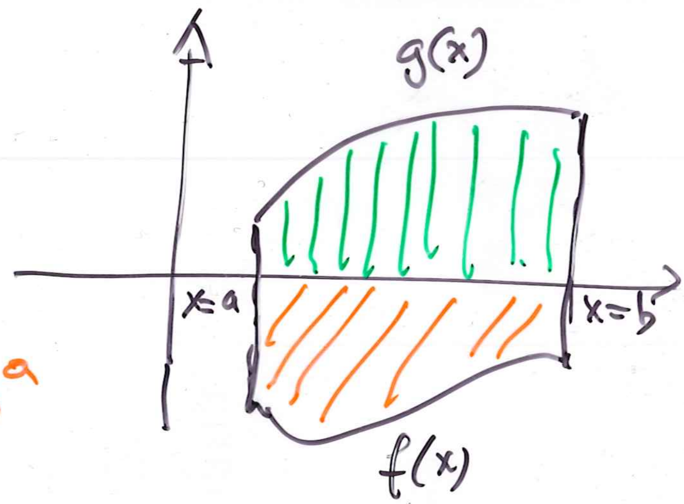


$$\int_a^b |f(x)|\,dx - \int_a^b |g(x)|\,dx =$$

$$= \int_a^b (-f(x))\,dx - \int_a^b (-g(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

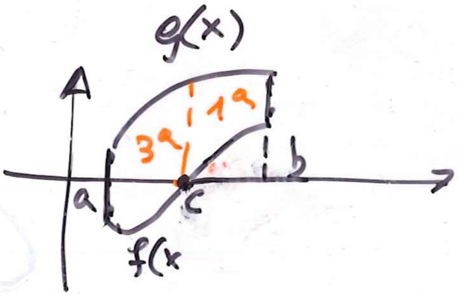
3ª



$$\int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b |f(x)|\,dx =$$

$$= \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b (-f(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$



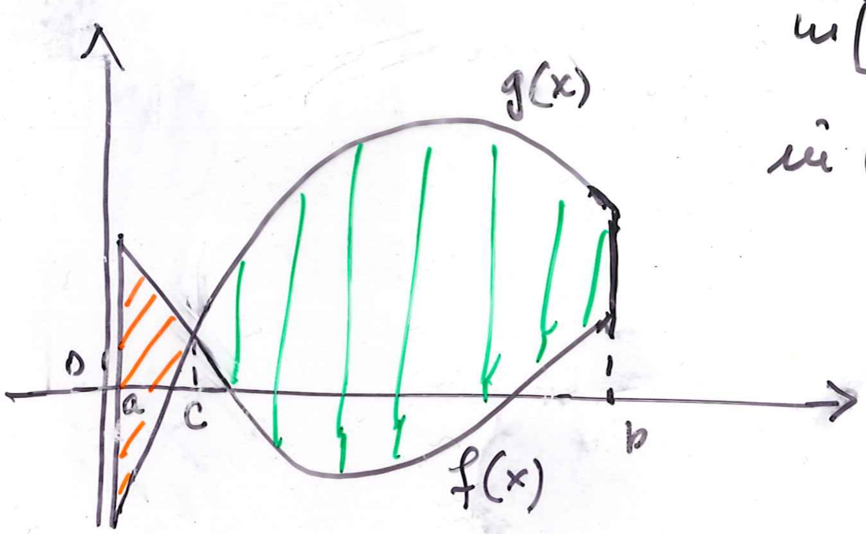
$$\int_a^c \big(g(x) - f(x)\big)\,dx + \int_c^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx =$$

$$= \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$ per l'additività degli intervalli di integr.

Attenzione: i grafici possono intersecarsi. Ad es:

in $[a, c)$ $f(x) > g(x)$

in $(c, b]$ $f(x) < g(x)$



Area della regione limitata delimitata dai grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e dalle rette $x=a$ e $x=b$ (in figura) è la somma di due aree a_1 e a_2

$$a_1 \swarrow \; f \geq g \qquad a_2 \searrow \; f < g$$

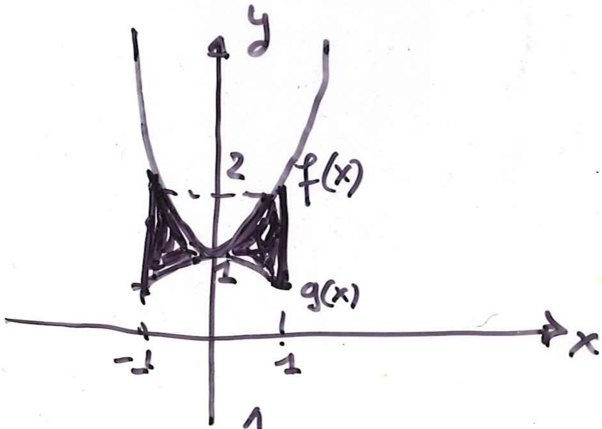
$$a_1 = \int_a^c (f(x) - g(x))\, dx$$

$$a_2 = \int_c^b (g(x) - f(x))\, dx$$

$$\Rightarrow a = a_1 + a_2$$

Le due integrande sono una l'opposta dell'altra: calcolo "la" primitiva di una delle due integrande e per l'altra basta cambiare segno.

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici di $f(x) = x^2+1$ e di $g(x) = \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$ e le rette $x=-1$ e $x=1$



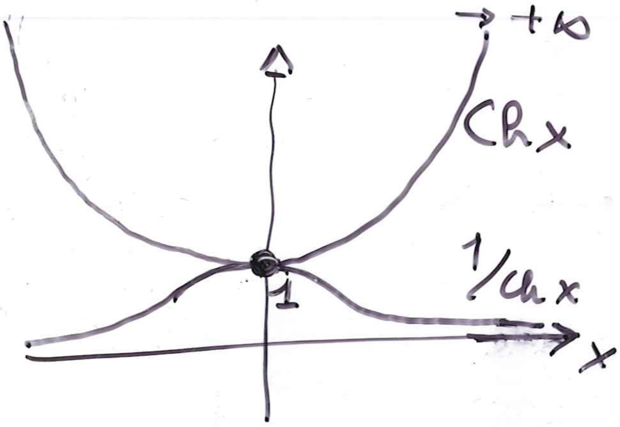
$f(x)$ è rappr. da una parabola con asse l'asse y e vertice in $(0,1)$ e concavità verso l'alto. $f(x) \geq 1$.

$f(-1) = f(1) = 2$

(decresce in $(-1,0)$ e cresce in $(0,1)$)

$$g(x) = \frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}$$

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{pari}$$



$$g(-1) = g(1) = \frac{2}{e+e^{-1}}$$

Si vede che $\forall x \in [-1,1]$

$f(x) \geq g(x)$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{1} \underbrace{(f(x)-g(x))}_{\text{è funz. pari}}\, dx$$

$$= 2\int_0^1 (f(x)-g(x))\, dx.$$

Calcolo una primitiva di $f(x)-g(x)$ ....

inizio da $g(x)$:

Il flesso è interno a $[-1,1]$? Non serve per il problema. Farlo per esercizio

$$\int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{2}{e^{-x}(e^{2x}+1)}\,dx =$$

$$= \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \boxed{\begin{aligned} e^x &= t \\ e^x dx &= dt \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\arctan t + c = 2\arctan(e^x)+c$$

$$\int (1+x^2)\,dx = x+\frac{x^3}{3}+c$$

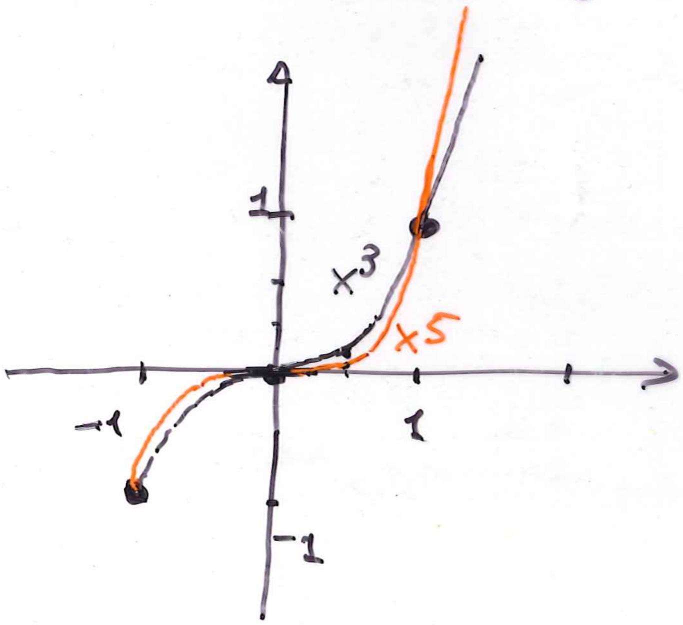
$$2\int_0^1 \left(1+x^2-\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)dx = 2\left[x+\frac{x^3}{3}-2\arctan e^x\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[\left(1+\frac{1}{3}-2\arctan(e)\right)-\left(0+0-2\arctan e^0\right)\right] =$$

$$= 2\left[\frac{4}{3}-2\arctan(e)+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{8}{3}+\pi-4\arctan(e)$$

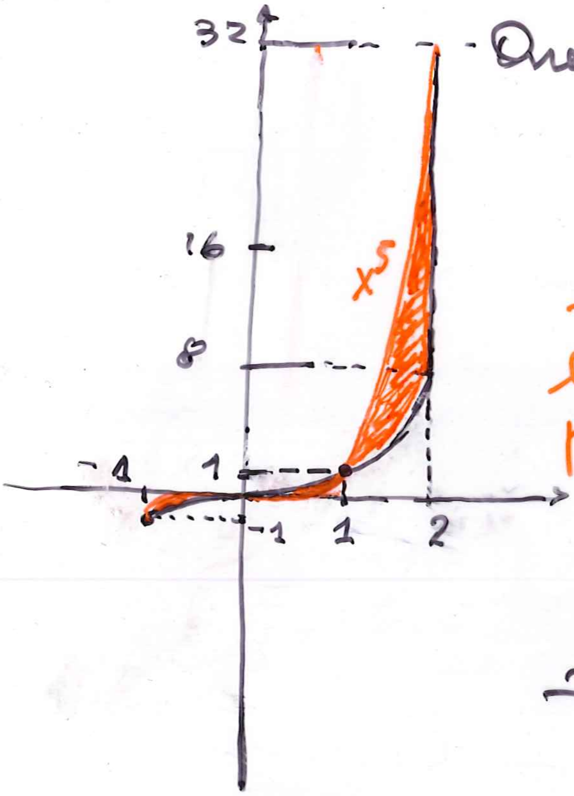
ora è lecito usare la calcolatrice

Area della regione di piano compresa tra $y=x^3$ e $y=x^5$ nell' interv. $[-1,2]$



$y=x^3$ e $y=x^5$ sono funzioni dispari $\Rightarrow$ grafici simm. risp. O

Sono entrambe crescenti



Sistema NON MONOMETRICO!

$$\text{Area} = \int_{-1}^{0}(x^5-x^3)\,dx + \int_{0}^{1}(x^3-x^5)\,dx + \int_{1}^{2}(x^5-x^3)\,dx =$$

rappresentano la stessa area perché le 2 regioni sono uguali

$$= 2\int_{0}^{1}(x^3-x^5)\,dx + \int_{1}^{2}(x^5-x^3)\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1 + \left[\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{64}{6}-\frac{16}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{6} + \frac{32}{3} - 4 =$$

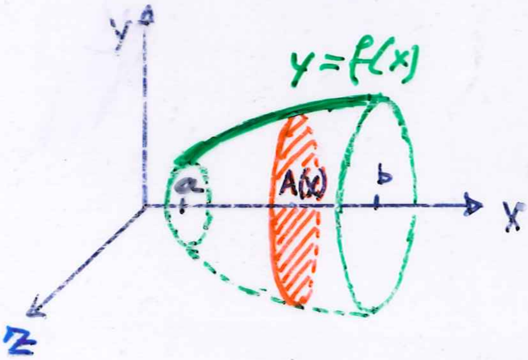
$$= \frac{9-2+80}{12} = \frac{87}{12}$$

Qualche applicazione degli integrali definiti

$\boxed{1.}$ Calcolo di aree (VEDI)

$\boxed{2.}$ Calcolo del volume di un solido.

Se possibile conoscere il valore dell'area di tutte le sezioni del solido con piani ortogonali a una direzione fissata



il volume è ....

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

In particolare se il solido si ottiene per rotazione attorno all'asse x di $y=f(x)$ risulta

$$A(x) = \pi(f(x))^2$$

... il volume di ogni cilindretto : $dV = \pi\,(f(x))^2\,dx$

e quindi il volume totale : $V = \int_a^b \pi\,(f(x))^2\,dx$

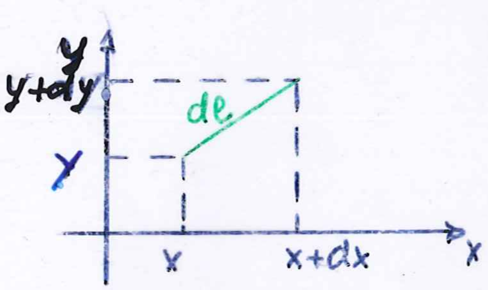
ES 1. $f(x) = \cos x$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow V = \int_0^{\pi/2} \pi(\cos x)^2 dx = \dots$

Es. 2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a=0$, $b=1$ $\Rightarrow V = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx =$
(SEMISFERA)

$$= \pi\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \pi\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$\boxed{3.}$ Calcolo della lunghezza di un arco di grafico

Ipotesi: $f(x)$ e $f'(x)$ continue in $[a,b]$. Posto $y=f(x)$



$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(dx)^2\cdot\left(1+(f'(x))^2\right)} =$$
$$= \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$\Rightarrow$ lunghezza dell'arco tra $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

ES.3 $f(x) = Ch\,x$ con $a=0$, $b=h>0$.

lunghezza dell'arco di $y = Ch\, x$
da $a = 0$ a $b = h > 0$

$$\int_0^h \sqrt{1+[(Ch\, x)']^2}\, dx =$$

$$Ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(Ch\, x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = Sh\, x$$

$$= \int_0^h \sqrt{1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{2 \cdot 2}}\, dx = \int_0^h \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}}\, dx$$

$$= \int_0^h \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^h =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^h - e^{-h} - \cancel{(e^0 - e^0)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^h - e^{-h}\right).$$

$2e^{-x} \cdot e^x = 2$

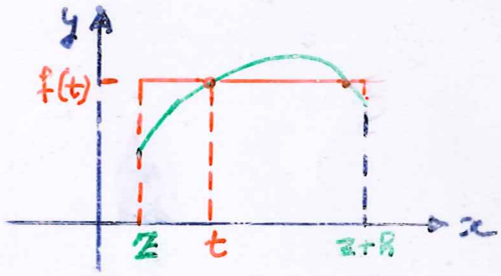
TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è CONTINUA su $[a,b]$ allora la "funzione integrale" $F(z)=\int_c^z f(x)\,dx$ (dipendente dall'estremo di integrazione z e definita per ogni $c, z\in[a,b]$ ... per definizione di integrale) è DERIVABILE per ogni $z\in(a,b)$ e $F'(z)=f(z)$.

Dim. Bisogna provare: $\lim_{h\to 0}\dfrac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)$.

$$\left.\begin{aligned}
F(z)&=\int_c^z f(x)\,dx\\
F(z+h)&=\int_c^{z+h} f(x)\,dx=\int_c^z f(x)\,dx+\int_z^{z+h} f(x)\,dx
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}&F(z+h)-F(z)=\\&\int_z^{z+h} f(x)\,dx\end{aligned}$$

SE È VERO CHE per ogni z e h tali che z e $z+h\in[a,b]$ ESISTE un t tra z e $z+h$ tale che

$$\int_z^{z+h} f(x)\,dx=f(t)\,h$$



si ha

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{f(t)\,h}{h}=f(t)$$

e poiché t sta tra z e $z+h$, per $h\to 0$ si ha $t\to z$. Dunque

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\lim_{t\to z} f(t)=f(z).$$

per la CONTINUITÀ di f

È sostanzialmente il teorema del valor medio del calcolo integrale. L'unico problema è che h può essere >0 o <0.

Nel primo caso O.K.

Nel secondo per il T. del V.M. esiste $t\in(z+h,z)$ tale che

$$\int_{z+h}^{z} f(x)\,dx=f(t)\,(z-(z+h))=-f(t)\,h \Rightarrow \int_z^{z+h} f(x)\,dx=h\,f(t)$$

O.K.

Dal teor. fondamentale del calcolo si rideduce la formula per il calcolo esatto dell' integrale, poiché il teorema dice che in $[a,b]$ $F(z) = \int_c^z f(x)\,dx$ è una primitiva di $f(z)$.

Allora se $G(z)$ è una primitiva "comoda" di $f(z)$ $G(z)$ e $F(z)$ differiscono per una costante k:

$$G(z) - F(z) = k \qquad \forall z \in (a,b)$$

In particolare

$$k = G(c) - F(c) = G(c) - 0$$

$$\Rightarrow F(z) = G(z) - G(c)$$

In particolare per $c = a$, $z = b$: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCOLO INTEGRALE.

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è CONTINUA in $[a,b]$, esiste $t \in (a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(t)$.

Dim. Dalla continuità in $[a,b]$: $f(x)$ ha massimo M e minimo m: ASSOLUTI

$$m \leq f(x) \leq M$$

Proprietà degli integrali:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Definizione di integrale:

$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \underbrace{(m + \dots + m)}_{n \text{ volte}}$

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

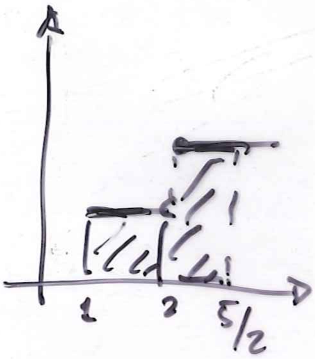
cioè

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Dalla continuità di f in $[a,b]$ (Teorema dei valori intermedi): esiste un $t \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(t).$$

c.v.d.



$$\int_1^{5/2} \lfloor x \rfloor dx = \int_1^2 \lfloor x \rfloor dx + \int_2^{5/2} \lfloor x \rfloor dx$$

$$= 1 + \left(\frac{5}{2} - 2\right) \cdot 2 = 2$$

Esiste $t \in [1, 5/2]$ tale che $f(t)(5/2 - 1) = 2$?

$\lfloor t \rfloor = \frac{4}{3}$ NO!

Quindi la continuità è cruciale per la validità del teorema del valor medio del calcolo integrale