Qualche altro esercizio:

1. Il valore dell'integrale definito $\int_1^e (\ln x)(1+\frac{1}{x})\,dx$ è

(a) -1 (b) $3/2$ (c) 0 (d) $e+1$ (e) $e-1$

2. L'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3}{3}$, dall'asse y e dalle rette $y=-9$ e $y=9$ è

(a) $81/4$ (b) 13.5 (c) 0 (d) $= 40.5$ (e) 36

(l'unità di misura è il quadrato di lato 1)

3. Quanto vale $\int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)^4}{\sqrt{x}}\,dx$?

(a) $\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\sqrt{2}$ (b) $\frac{62}{5}$ (c) $-\frac{203}{2}$ (d) $\frac{242}{5}$

(e) $\frac{10}{3}\sqrt{2}-\frac{14}{3}$

4. L'area della regione di piano compresa tra l'asse x il grafico di $f(x) = \frac{3(3\ln x-1)^4}{2x}$ e le rette $x=e^{1/3}$ e $x=e$ vale

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{31}{3}$ (c) $\frac{16}{5}$ (d) $\frac{1}{10}$ (e) $\frac{4}{5}$

5. Sia $f(x)=5x^2(2x^3-1)^4$. L'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ vale

(a) $-\frac{7}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{13}{3}$ (e) $\frac{5}{8}$.

INTEGRALE DEFINITO (Cauchy-Riemann): è definito

per una funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
continua nel chiuso limitato $[a,b]$. (⇒ la funzione è limitata!)

S_n = somme di C.-R.

$\exists$ finito $\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$

Generalizzo in 3 direzioni

(1) posso considerare una funzione che presenta in $[a,b]$ un numero finito di discontinuità a salto (o eliminabili). ⇢ INTEGRALE GENERALIZZATO

(2) o una funzione continua in $[a,b)$ (oppure in $(a,b]$) con $\lim_{x \to b^-}$ (oppure $\lim_{x \to a^+}$) $+\infty$ o $-\infty$

⇒ funzione illimitata in $[a,b)$ (oppure in $(a,b]$)

⇢ INTEGRALE IMPROPRIO di II SPECIE

(3) o una funzione continua su un intervallo illimitato $[a,+\infty)$ o $(-\infty,b]$

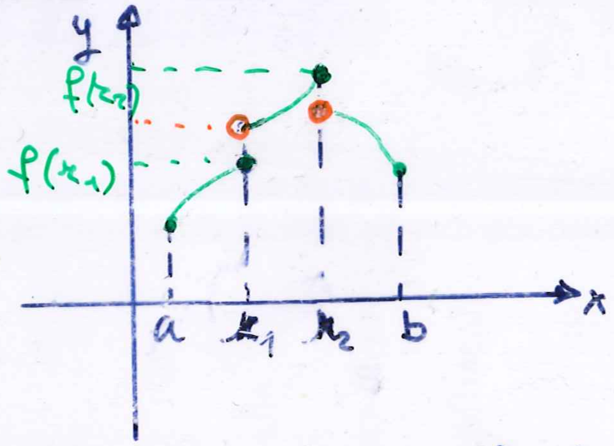
⇢ INTEGRALE IMPROPRIO di I SPECIE

INTEGRALI GENERALIZZATI

1. Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ non è continua su tutto $[a,b]$ ma presenta solo un numero finito $k-1$ di discontinuità A SALTO (*) definisco:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \qquad \text{ove}$$

$x_0 = a$, $x_k = b$, $x_1, \dots, x_{k-1}$ sono i punti di discontinuità

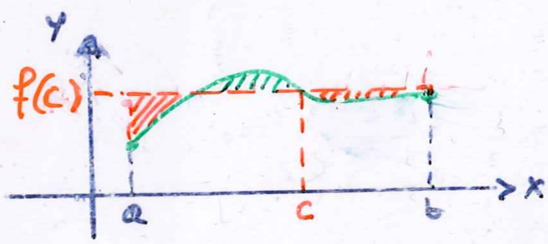


(*) oppure eliminabili

Il calcolo può essere fatto sfruttando – su ogni intervallo in cui è continua – i metodi visti precedentemente.

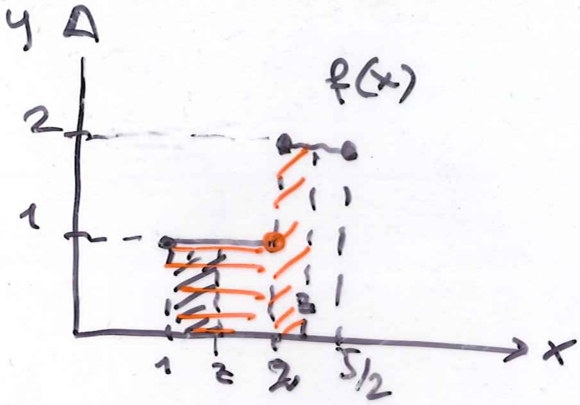
ATTENZIONE. Ci sono due teoremi teoricamente fondamentali che valgono SOLO per funzioni continue:

TEOR. DEL VALOR MEDIO: se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ esiste $c \in (a,b)$ tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c)$



TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO: se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, $F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è derivabile in (a,b) e $F'(z) = f(z)$.

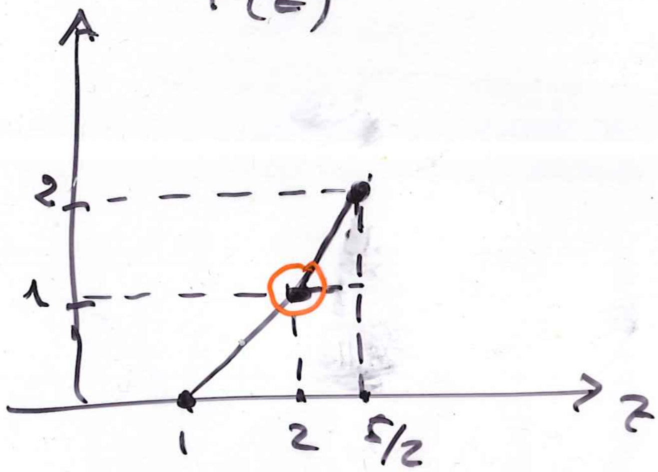
$f(x) = \lfloor x \rfloor$



$\int_1^z f(x)\,dx$?

se $z \in [1,2]$: $(z-1)\cdot 1 =$
$= z-1$

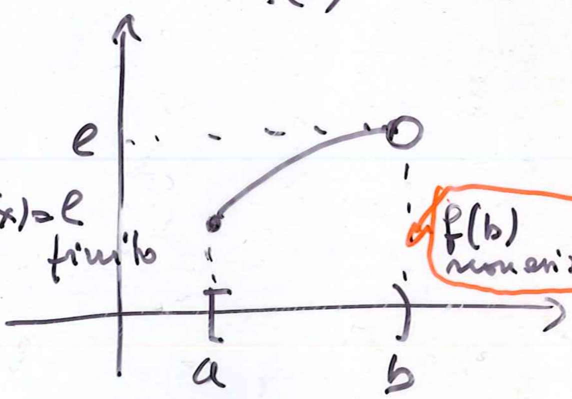
se $z \in (2, 5/2]$: $\int_1^2 \lfloor x \rfloor dx + \int_2^z \lfloor x \rfloor dx =$
$= 1 + 2(z-2) =$
$= 2z-3$



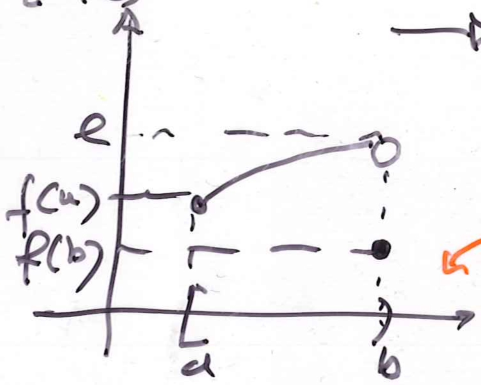
$F'_-(2) = 1$
$F'_+(2) = 2$
$\rightarrow$ F(z) non è derivab. in $z=2$

$f(x)$ cont. in $[a,b)$

1) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell$ finito



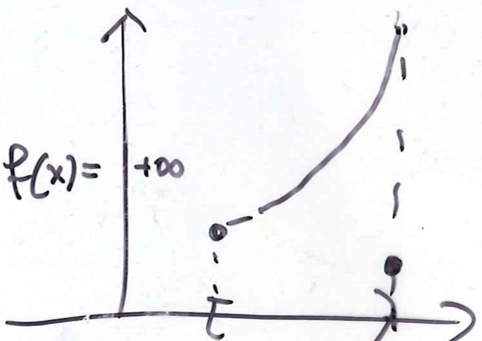
$\boxed{f(b) \text{ non esiste}}$



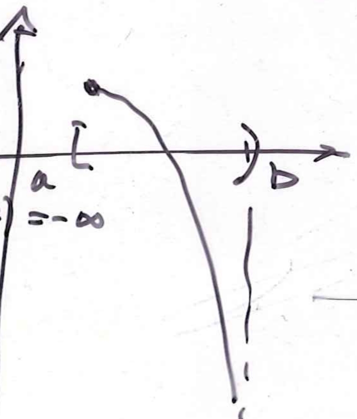
$\rightarrow$ Rientrano nell'integr. generalizzato

$\boxed{f(b) \text{ esiste ma } f(b) \neq \ell}$

2) $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$



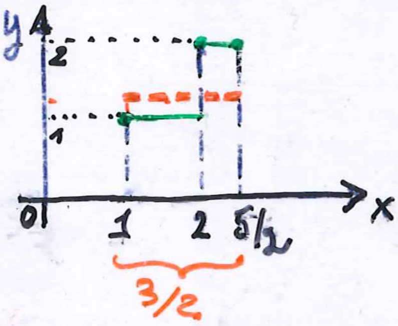
(Tanto se esiste quanto se non esiste f(b))

$\rightarrow$ INT IMP. 2ª specie

3) Se il limite non esiste ... non posso far nulla.

Ad es. se $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $[a,b] = [1, 5/2]$, posso calcolare

$$\int_1^{5/2} \lfloor x \rfloor \, dx = \int_1^2 1 \cdot dx + \int_2^{5/2} 2 dx = 1 + 1 = 2,$$



ma non esiste $c \in [1, 5/2]$ tale che

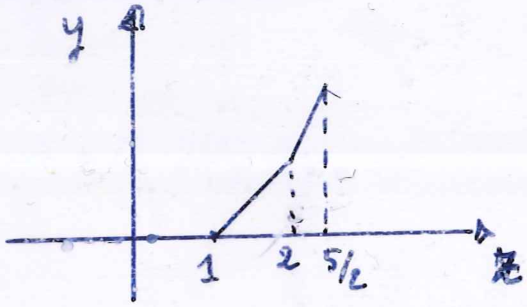
$$\int_1^{5/2} \lfloor x \rfloor \, dx = \left(\frac{5}{2} - 1\right) \lfloor c \rfloor$$

poiché vorrebbe dire: $\lfloor c \rfloor = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$!

Ancora: esiste la funzione $F(z) = \int_1^z f(x)\, dx = \begin{cases} z-1 \text{ se } z \in [1,2) \\ 2z-3 \text{ se } z \in [2, 5/2] \end{cases}$

ma in $x = 2$ non è derivabile

$$\int_1^2 dx + \int_2^z 2 dx = $$
$$= 1 + 2z - 4$$



2. $f(x)$ definita e continua in $[a, b)$ ma NON LIMITATA in $[a, b]$ $\left(\lim_{x \to b-} f(x) = \pm\infty \right)$

Definisco l'<u>integrale</u> <u>generalizzato</u> (INT. IMPROPRIO DI II SPECIE)

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = \lim_{z \to b-} \int_a^z f(x) dx$$

Se il limite esiste finito (o infinito) dico che l'integrale generalizzato (IMPROPRIO di II specie) è CONVERGENTE (o DIVERGENTE) (ecc.: terminologia dei limiti)

Esempio: cruciale
$$\int_{0+}^b \frac{1}{x^k} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^k} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \ln|b| - \ln|\varepsilon| \\ \dfrac{b^{1-k} - \varepsilon^{1-k}}{1-k} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{INTEGR. DIVERG.} \\ \text{se } k > 1 & +\infty \\ \text{se } k < 1 & \dfrac{b^{1-k}}{1-k} \end{cases}$$

In realtà qui $f(x)$ è def. e continua in $(0, b]$ ...

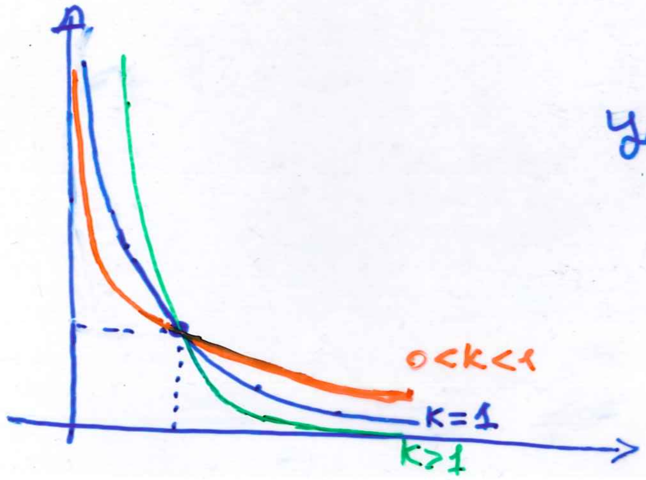
ESEMPIO CRUCIALE

$\dfrac{1}{x^k}$ con $k > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^k} = +\infty$$

su $(0, b]$ devo calcolare

int. improprio di 2ª specie



$$\int_{0^+}^{b} \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{z\to 0^+} \int_z^b \frac{1}{x^k}\,dx =$$

$$\lim_{z\to 0^+} G(b) - G(z) = \quad \text{ove}$$

$G(x)$ è una primitiva di $\dfrac{1}{x^k} = x^{-k}$

$\boxed{k=1}$ $= \lim_{z\to 0^+} \ln|b| - \ln|z| = \ln b + \infty = +\infty$

$\boxed{k\neq 1}$ $= \lim_{z\to 0^+} \dfrac{1}{1-k}\left(\dfrac{1}{b^{k-1}} - \dfrac{1}{z^{k-1}}\right)$

$\to k>1$: $z^{k-1} \to 0^+$ $\dfrac{1}{1-k}\cdot(-\infty) = +\infty$

$\to 0<k<1$: $z^{k-1} \to +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{z^{k-1}} \to 0$

$\Rightarrow$ limite è $\dfrac{1}{1-k}\cdot\dfrac{1}{b^{k-1}}$

$$G(x) = \begin{cases} k=1 : & \ln|x| \\ k\neq 1 : & \dfrac{x^{-k+1}}{1-k} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $k=1$ l'integrale diverge.

$k>1$ " "

$0<k<1$ " converge a $\dfrac{1}{(1-k)\,b^{k-1}}$

I14.1

$$\int_0^{2^-} \frac{1}{(2-x)^k}\, dx \qquad k>0 \;,\; k \in \mathbb{R}$$

I.D. $(-\infty, 2)$

$$G(x) = \int \frac{1}{(2-x)^k}\, dx$$

$k=1$

$$\int \frac{dx}{2-x} = -\int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-2| + c$$

$k \neq 1$

$$\int \frac{dx}{(2-x)^k} = -\frac{(2-x)^{1-k}}{1-k} + c$$

$$\int_0^{2^-} \frac{1}{2-x}\, dx = \lim_{z \to 2^-} \int_0^z \frac{1}{2-x}\, dx =$$

$$= \lim_{z \to 2^-} \Big[-\ln(2-x)\Big]_0^z = \lim_{z \to 2^-} \Big[-\ln(2-z) + \ln 2\Big]$$

$$= +\infty$$

$\boxed{k \neq 1}$

$$\int_0^{2^-} \frac{1}{(2-x)^k}\, dx = \lim_{z \to 2^-} \int_0^z \frac{1}{(2-x)^k}\, dx =$$

$$= \lim_{z \to 2^-} \left[\frac{(2-x)^{1-k}}{k-1}\right]_0^z = \lim_{z \to 2^-} \left(\frac{(2-z)^{1-k}}{k-1} - \frac{2^{1-k}}{k-1}\right) =$$

$2-z \to 0^+$ $\nearrow$ se $0<k<1$ $\Rightarrow$ l'int. converge a $0 + \frac{2^{1-k}}{1-k}$

$\searrow$ se $k>1$ $\Rightarrow$ $(2-z)^{1-k} \to +\infty$: integrale diverge a $+\infty$

Ancora $\displaystyle\int_0^{2^-} \frac{1}{(2-x)^k}\,dx =$

3. $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ f continua in ogni sottointervallo chiuso e limitato.

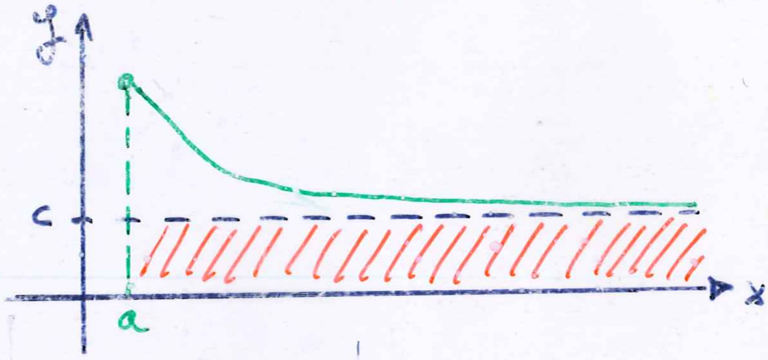
Definisco l'<u>integrale</u> <u>generalizzato</u> (INT. IMPROPRIO DI I SPECIE)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\omega\to+\infty}\int_a^{\omega} f(x)\,dx$$

Esempio cruciale:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} k=1: \displaystyle\lim_{\omega\to+\infty} \ln|\omega|-\ln|a| = +\infty \\ k<1: \displaystyle\lim_{\omega\to+\infty} \frac{\omega^{1-k}-a^{1-k}}{1-k} = +\infty \\ k>1: \displaystyle\lim_{\omega\to+\infty} \frac{1/\omega^{k-1} - a^{1-k}}{1-k} = \frac{a^{1-k}}{k-1} \end{cases}$$

NOTA BENE: perché questo integrale converga (cioè perché converga $\displaystyle\lim_{\omega\to+\infty}\int_a^{\omega} f(x)\,dx$) bisogna ALMENO che $f(x)\to 0$ allorché $x\to+\infty$



Es.1) Si trovi il valore del seguente integrale generalizzato

$$\int_{16}^{+\infty}\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$$

Es.2) Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-1/2}\,e^{-\sqrt{x}}\,dx$

N.B. Sull'esistenza dell'integrale improprio di cui all'esercizio successivo e sulle considerazioni che permettono di dire che tale limite è >0 non finito e quindi $=+\infty$ si veda fine pag I.14.2

Si trovi il valore di $\displaystyle\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$.

VIA VELOCE:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = ?\ \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{diverge a } +\infty$$

(essendo $f(x)\geq 0$)

VIA DEFINIZIONE:

Con i conti. Trovo una primitiva

$$\int \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx =$$

Sostituzione con $\sqrt{x}=t$
$x=t^2$
$dx=2t\,dt$

$$\int \frac{2+t}{2t+1}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t^2+4t}{2t+1}\,dt =$$

RAZ FRATTA
NUM. ha grado $\geq$ del DEN $\Rightarrow$ devo dividere

$$\begin{array}{r|l} 2t^2+4t & 2t+1 \\ \cline{2-2} -2t^2-t & t+\frac{3}{2} \\ \cline{1-1} 3t & \\ -3t-\frac{3}{2} & \\ \cline{1-1} -\frac{3}{2} & \end{array}$$

$$2t^2+4t=(2t+1)\left(t+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}$$

$$= \int \left(t+\frac{3}{2} - \frac{3}{2\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2}{2t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\ln|2t+1| + c =$$

$$= \frac{x}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{4}\ln(2\sqrt{x}+1) + c$$

$$\int_{16}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx = \lim_{z\to+\infty}\int_{16}^{z}\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx =$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left[\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{4}\ln\left(2\sqrt{x}+1\right)\right]_{16}^{z} =$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{z}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{z}-\frac{3}{4}\ln\left(2\sqrt{z}+1\right)-8-6+\frac{3}{4}\ln 9\right) =$$

$$\left(\frac{\ln\left(2\sqrt{z}+1\right)}{z}\to 0\right)$$ per risolvere la F.I. $[\infty-\infty]$ $= +\infty$

Perché sono sicura che $\int_{16}^{+\infty}\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$ esista finito o infinito?

$$\int_{16}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z\to+\infty}\int_{16}^{z} f(x)\,dx$$

Per il teorema fondamentale del calcolo:

$$\left(\int_{16}^{z} f(x)\,dx\right)' = f(z)$$

$f(z) = \frac{2+\sqrt{z}}{2\sqrt{z}+1} > 0 \quad \forall z \geq 0 \implies$ la funzione integrale CRESCE $\implies$ ammette limite per $z\to+\infty$. Visto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ il $\lim_{z\to+\infty} F(z)$ non è finito e dato che $F'(z)>0$ è $+\infty$

$$\int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-\sqrt{x}}\, dx \quad ?$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^{1/2} e^{\sqrt{x}}} \to 0$ per $x \to +\infty$

l'integrale può darsi che converga.
(e comunque esiste perché $f(x) > 0$ e quindi la funz integrale è monotona CRESCENTE)

1°) primitiva:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx = \boxed{\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dt \end{array}}$$

$$= \int 2e^{-t}\, dt = -2e^{-t} + c = -2e^{-\sqrt{x}} + c$$

2°) Funz integrale

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx = -2e^{-\sqrt{z}} + 2e^0 = 2\left(1 - e^{-\sqrt{z}}\right)$$

3°) $\lim\limits_{z \to +\infty} \displaystyle\int_0^z \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx = \lim\limits_{z \to +\infty} 2\left(1 - e^{-\sqrt{z}}\right) = 2$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx = 2}$$

Es 3) Calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \operatorname{sen} e^{-x}\, dx$

Es 4) Quale delle seguenti uguaglianze è falsa?

(a) $\int_1^e x^{-2} dx = 1 - e^{-1}$ (b) $\int_{0+}^1 x^{-1/2} dx = 2$

(c) $\int_{-1}^e x^{-2} dx = -(1+e^{-1})$ (d) $\int_{1/2}^{+\infty} x^{-2} dx = 2$

(f) $\int_{-1}^1 |x|^{-1/2} dx = 4$

ES.5) Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

Es.6) Calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k}\, dx$ $(k \neq 1)$

E $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx$ che cosa fa? Converge o diverge?

Non è facile calcolare una primitiva e quindi la funzione integrale e il suo limite per $z \to +\infty$.

L'idea è di procedere per CONFRONTO.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{z\to+\infty}\int_2^{z} \frac{1}{x\ln x}\,dx =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \ln|\ln z| - \ln|\ln 2| = +\infty$$

primitiva $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \boxed{\begin{array}{l}\ln x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{array}}$ $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|+c = \ln|\ln x| + c$

$k \neq 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k}\,dx = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{1}{(\ln z)^{k-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{k-1}}\right)\frac{1}{1-k}$$

se $k<1$: $+\infty$

$k>1$: $\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^{k-1}}$ converge.

Ma $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln x}\,dx$?

primitiva ??

Osservo che in $[2,+\infty)$ $\ln x > 0$ e quindi

$$\frac{1}{x^2\ln x} < \frac{1}{x^2} \iff \ln x > 1 \iff x > e$$

Le regioni comprese tra $x=e$, $x=z$, $y=0$ e $1/x\ln x$ sono contenute in quelle comprese tra le stesse rette e $1/x^2$. Poiché il limite delle aree di queste ultime esiste finito .....