10 minuti di TUTORAGGIO

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 \sqrt{\cos x}\, dx$$

$$-(\operatorname{sen} x)^3 = -\operatorname{sen} x\, (\operatorname{sen} x)^2 = +\operatorname{sen} x\, (-1 + (\cos x)^2)$$

$\cos x = t$

$-\operatorname{sen} x\, dx = dt$

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 \sqrt{\cos x}\, dx = \int (t^2 - 1)\sqrt{t}\, dt = \int (t^2\sqrt{t} - \sqrt{t})\, dt$$

$$= \int (t^{5/2} - t^{1/2})\, dt = \frac{t^{7/2}}{7/2} - \frac{t^{3/2}}{3/2} + c =$$

$$= 2/7\, (\cos x)^{7/2} - 2/3\, (\cos x)^{3/2} + c$$

A casa

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx$$

Ricordare che $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

A casa con i criteri di convergenza esposti nelle pagine successive verificare che

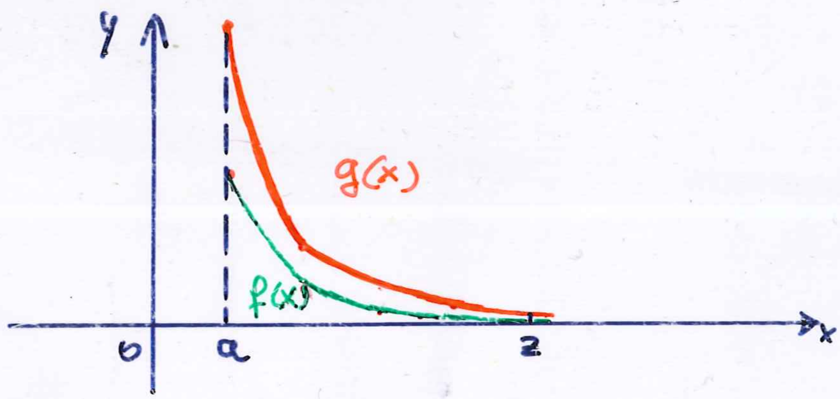
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx$$

converge.

Ho una funzione $f(x) \geq 0 \Rightarrow F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$ è CRESCENTE

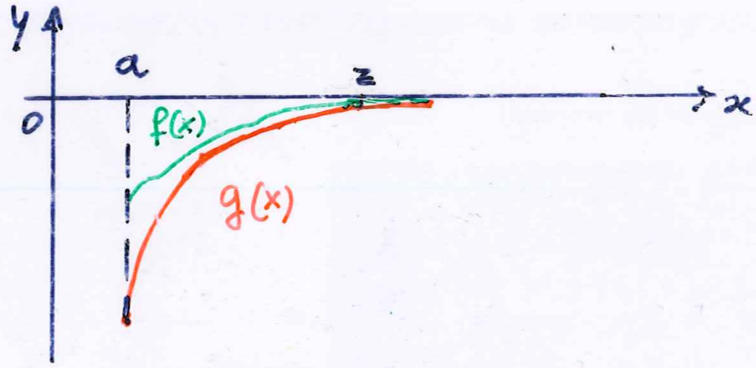
$\Rightarrow \lim_{z \to +\infty} F(z)$ esiste (finito o no)

Se esiste una funzione $g(x) \geq f(x)$ su tutto $(a, +\infty)$ e tale che $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito, allora (TEOR. del confronto) anche $\lim_{z \to +\infty} F(z)$ è finito



NOTA: l'area del TRAPEZOIDE di g(x) è maggiore dell'area del TRAPEZOIDE DI f(x)

Similmente se $f(x) \leq 0$ in $(a, +\infty)$ e $g(x) \leq f(x)$ su $(a, +\infty)$ con $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ finito, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge:



A rovescio: se $f(x) \geq 0$ e c'è una funzione $g(x)$ tale che $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$ allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

(Tradurre nel caso negativo)

Se $\overset{\text{continue}}{f(x)} \geq 0$ in $[a,+\infty)$ e $\overset{\text{continue}}{g(x)} > 0$ in $[a,+\infty)$ e se

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ finito
- $\lim_{z\to+\infty} \int_a^z g(x)\,dx$ è finito

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è finito

INVECE se

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
- $\lim_{z\to+\infty} \int_a^z g(x)\,dx = +\infty$

allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

ADDIRITTURA se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ posso dire

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se converge $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

AD ES. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge poiché

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^z e^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} 1-e^{-z} = 1$$

e

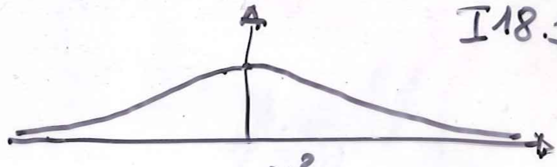
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(1-x)} = 0.$$

ES.7) $\int_1^{+\infty} x^s e^{-x}\,dx$ $\overset{\forall s \in \mathbb{R}}{\text{converge}}$. Infatti:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^s e^{-x}}{x^{-k}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s+k}}{e^x} = 0$ $\forall k$ e in particolare

per $k=2$. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ converge, anche l'integrale assegnato converge

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

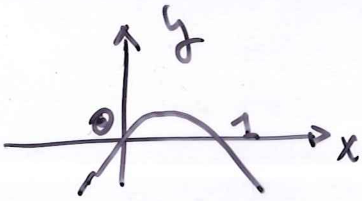


$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$$

l'integ. impr. di I specie "potrebbe" convergere.

Confronto $f(x) = e^{-x^2}$ con $e^{-x} = g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2} = e^{-\infty} = 0$$



per $x \to +\infty$, e^{-x^2} è un infinitesimo di ordine superiore a e^{-x}.

Ora

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_0^{z} e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \left(-e^{-z} + e^{0}\right) = -0 + 1 = 1$$

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ CONVERGE.

ATTENZIONE alla scelta della funz. di confronto $g(x)$ (ad es. $g(x) = 1/x$ non va bene poiché $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/x} = 0 \;)$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\,dx$$

I.D. $f(x)$: $x(x^2-1)>0$
cioè $(-1,0)\cup(1,+\infty)$
$f(x)$ è continua e ≥ 0 in $[2,+\infty)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}} \sim ?\ \frac{1}{\sqrt{x^3}} \quad \text{per } x\to+\infty\,;$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

VERIFICA dell'asintoticità:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1\ ?$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x(x^2-1)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3-x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{\frac{x^3-x}{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-1/x^2}}=1$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx=\lim_{z\to+\infty}\int_2^z x^{-3/2}\,dx=$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\left[-2x^{-1/2}\right]_2^z=\lim_{z\to+\infty}-2\left(z^{-1/2}-2^{-1/2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ \text{finito}$$

$\Rightarrow \int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$

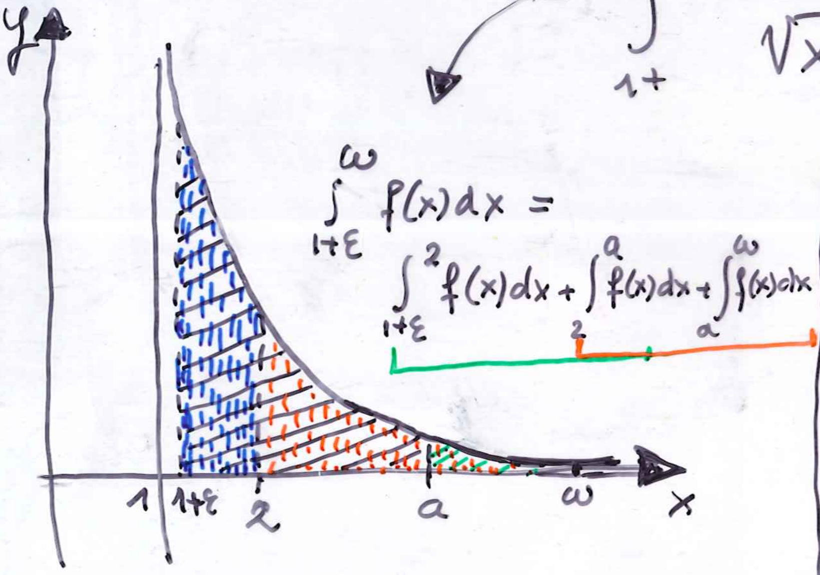
$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

E se invece chiedessi se converge:

$$\int_{1^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\,dx \overset{?}{=}$$ questo integrale va interpretato così:

$$= \int_{1^+}^{2} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\,dx + \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\,dx = \quad (\forall a > 1)$$

$$= \int_{1^+}^{a} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\,dx + \int_{a} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\,dx$$



funziona bene se entrambi gli integrali convergono, oppure solo uno diverge, oppure entrambi divergono allo stesso ∞

Valgono anche per gli integrali impropri di 2ª specie i teoremi di confronto

$g, f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b)$ e illimitate

1) (con disuguaglianza):

- se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e $\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ converge anche $\int_a^{b^-} f(x)$ converge.

- se $0 \leq g(x) \leq f(x)$ e $\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ diverge anche $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ diverge

2) (con i limiti)

$f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, continue in $[a,b)$ e illimitate in $[a,b)$

se $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ e

- $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ finito

  se $\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ converge allora anche

  $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ "

- $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

  se $\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ diverge allora anche

  $\int_a^{b} f(x)\,dx$ diverge.

- se $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$

  $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ converge

  diverge diverge

Rifare tutto per $f(x) \leq 0$

" " " $f: (a, b] \to \mathbb{R}$

ES.
$$\int_{1^+}^{2} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\,dx \qquad \text{converge o diverge?}$$

per $x \to 1^+$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)(x-1)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2\cdot (x-1)}}$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}$$

$$\int_{1^+}^{2} g(x)\,dx = \lim_{z\to 1^+} \int_{z}^{2} \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2(x-1)}}\,dx =$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{z\to 1^+} \Big[\sqrt{2}\cdot\sqrt{x-1}\Big]_{z}^{2} =$$

$$= \lim_{z\to 1^+} \sqrt{2}\left(\sqrt{2-1} - \sqrt{z-1}\right) = \sqrt{2}$$

Converge

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1^+}^{2} f(x)\,dx$ converge.

Ne deduciamo che (vedi pag I18.3)

$$\int_{1^+}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{1^+}^{2} f(x)\,dx}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{conv.}} : \text{converge}$$

ESERCIZIO : $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\,dx$ converge?

In maniera simile ci si comporta con gli integrali impropri di II specie:

ES. $\int_{0+}^{1} e^{-x} x^s dx$ è un integrale improprio solo se $s<0$

Ora $e^{-x}x^s > 0$; $e^{-x} \to 1$ per $x \to 0$ e quindi

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-x}x^s}{x^s} = 1$$

Allora, visto che $\int_{0+}^{1} x^s dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$,

anche $\int_{0+}^{1} e^{-x} x^s dx$ converge $\Leftrightarrow -1<s<0$.

Dunque resta definita una funzione:

$$\Gamma(s) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-x} x^s dx \qquad \forall s>-1$$

detta funzione di Eulero che è tale che

$$\Gamma(n) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

$$\int_{0+}^{1} e^{-x} x^s dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x} x^s dx$$

TEOR. LAGRANGE

monotonia di una funz.

approssimazione locale

individuazione di come sono fatte TUTTE le primitive

INTEGRALE DEFINITO

T.F.C. calcolo dell' integrale definito

FUNZ. INTEGRALI

INTEGRALI IMPROPRI

andare a esprimere una funzione f in $\boxed{\text{un intorno}}$ di un punto x_0 in cui essa è definita mediante funz. + semplici

Intorno di x_0 è un intervallo aperto contenente x_0. Intorno "centrato in x_0": $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\delta \in (0,+\infty)$: $(x_0-\delta, x_0+\delta) : \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0|<\delta \}$

Derivate successive

Supponiamo che $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sia derivabile in ogni punto $x_0 \in (a_1, b_1) \subseteq (a,b)$.

Resta definita una funzione

$$f' : (a_1, b_1) \to \mathbb{R}$$
$$x_0 \mapsto f'(x_0)$$

che si chiama FUNZIONE DERIVATA di f.

Si possono allora cercare i punti x_1 di (a_1, b_1) in cui la funzione f' è derivabile cioè esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_1 + h) - f'(x_1)}{h} = (f')'(x_1).$$

Per semplicità si scrive f'' invece di $(f')'$ e si chiama $f''(x_1)$ derivata seconda di f in x_1.

Se in ogni punto $x_1 \in (a_2, b_2) \subseteq (a_1, b_1)$ la funzione f' è derivabile, resta definita una nuova funzione

$$f'' : (a_2, b_2) \to \mathbb{R}$$
$$x_1 \mapsto f''(x_1)$$

che si chiama funzione derivata seconda di f.

Proseguendo così, a partire dalla funzione derivata n-esima di f

$$f^{(n)} : (a_n, b_n) \to \mathbb{R}$$

si può definire la derivata $(n+1)$-esima in un punto $x_n \in (a_n, b_n)$ come

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(x_n + h) - f^{(n)}(x_n)}{h} = f^{(n+1)}(x_n)$$

(se esiste finito).

ESEMPIO : calcolare le derivate successive di x^6.

Approssimazioni locali

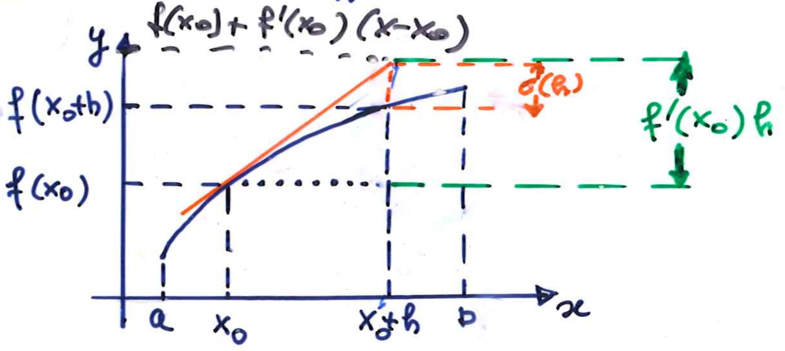
Già visto: Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e $x_0+h\in(a,b)$

$$* \qquad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h)$$

ove $o(h)$ significa che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

Geometricamente:



... se $h\to 0$ posso sostituire a $f(x_0+h)$ il valore $f(x_0)+h\cdot f'(x_0)$, ordinata del punto, sulla tangente in $(x_0, f(x_0))$, che ha ascissa x_0

Di solito si indica "l'incremento calcolato lungo la tangente": $hf'(x_0)$ con il simbolo df, <u>differenziale di f in x_0</u>.
Se $f(x)=x$, $f'(x)=1 \Rightarrow dx = h$. Si arriva così alla scrittura

$$df = f'(x_0)\,dx.$$

Altra cosa già vista:

se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), esiste $c\in(a,b)$ t.c. $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$

e, se $x_0,\ x_0+h\in[a,b]$, esiste $c\in(a,b)$ t.c. (anzi interno all'intervallo di estremi x_0 e x_0+h)

$$** \qquad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(c)\cdot h$$

*,** Sono due formule di approssimazione "locali" cioè valide in un "piccolo" intorno di x_0.

Voglio generalizzare. Perché?

- <u>Calcolo di limiti.</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+o(x))-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} = ??$$

(*) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x+o(x))-x}{(1+x)(x+o(x))^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2+o(x)+xo(x)-x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} = ??$$

- <u>Stima di "quel che trascuro"</u>

Come generalizzo? Ho visto che la derivata seconda mi dà indicazioni sulla curvatura del grafico ("quanto il grafico è diverso da una retta?").
Mi chiedo: posso generalizzare ** utilizzando * come passo di partenza?
Cioè esiste un numero reale k tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + k\,h^2$$

Se sì

$$f'(x_0+h) = f'(x_0) + 2k\,h.$$

La funzione f' è derivabile su (a,b) e continua su $[a,b]$?
Se sì il teorema di Lagrange dice che $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = f''(c)$$ intermedio tra x_0 e x_0+h

$\Rightarrow$ basta scegliere $k = \frac{1}{2} f''(c)$. Concludendo:

(*) Questo esempio proviene dal calcolo e studio della derivata di $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

Più in generale, se voglio un polinomio P di grado $(n+1)$ che approssimi abbastanza bene $f(x)$ "abbastanza vicino" a x_0 possiamo ragionare così

Per comodità prendo $n+1=3$, ma il discorso (euristico) può essere facilmente generalizzato.

Supponiamo che ci siano le prime $n=2$ derivate di $f(x)$ e siano continue in $[a,b]$ e che ci sia la derivata $(n+1)$-esima (terza) in (a,b).

Voglio che in x_0 P e le sue derivate fino alla n-esima (seconda) abbiano lo stesso valore di f e delle sue derivate

$$P(x) = A + B(x-x_0) + C(x-x_0)^2 + D(x-x_0)^3 \Rightarrow P(x_0) = A = f(x_0)$$

$$P'(x) = B + 2C(x-x_0) + 3D(x-x_0)^2 \Rightarrow P'(x_0) = B = f'(x_0)$$

$$P''(x) = 2C + 6D(x-x_0) \Rightarrow P''(x_0) = 2C = f''(x_0)$$

$$P'''(x) = 6D$$

$$\Rightarrow P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + D(x-x_0)^3$$

Si può riscrivere: $P(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + Dh^3$.

Se questo polinomio in x_0+h deve valere quanto f:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + Dh^3$$

devono essere uguali anche le derivate rispetto a h:

$$f'(x_0+h) = f'(x_0) + f''(x_0)h + 3Dh^2$$

$$f''(x_0+h) = f''(x_0) + 2\cdot 3D\cdot h$$

Applico il teorema di Lagrange in $[x_0, x_0+h]$ (o $[x_0+h, x_0]$ se $h<0$) (f'' è cont. in $[a,b]$ e $\exists f'''$ in (a,b)): esiste $c \in (x_0, x_0+h)$ (o ....) t.c. $f''(x_0+h) - f''(x_0) = f'''(c)\cdot h$

$$\Rightarrow 2\cdot 3D = f'''(c) \quad \Rightarrow D = \frac{f'''(c)}{3!}$$

∎

TEOREMA di TAYLOR. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e

- esista f' in $[a,b]$, continua in $[a,b]$
- " f'' in (a,b)

Allora se $h > 0$ esiste un $c \in (x_0, x_0+h) \subseteq (a,b)$

[" $h < 0$ " " $c \in (x_0+h, x_0) \subseteq (a,b)$]

tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \boxed{\tfrac{1}{2} f''(c)\,h^2}.$$

Questa formula dice che nella formula

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \boxed{o(h)}$$

l'$o(h)$ che "trascuro" ha l'ordine di grandezza di h^2.

In generale

TEOR. di TAYLOR (forma di Lagrange). Considero $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

- $f, f', \dots, f^{(n)}$ siano continue in $[a,b]$
- esista $f^{(n+1)}$ in (a,b).

Sia $x_0 \in (a,b)$ e $x_0 + h \in (a,b)$. Allora

se $h > 0$ esiste un $c \in (x_0, x_0+h)$

[" $h < 0$ " " $c \in (x_0+h, x_0)$]

tale che

$$(\blacktriangledown)\qquad \boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}.}$$

DEFINIZIONI

1) la (▼) è detta formula di Taylor (con il resto nella forma di Lagrange) con punto iniziale x_0, arrestata all'ordine n

2) $R_{n+1}(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$ è detto resto $(n+1)$-esimo

è la parte importante di (▼): stima quel che trascuro

3) $P_n(x_0,h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dfrac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$

è detto polinomio di Taylor con punto iniziale x_0 di grado n

Se non tutte le derivate sono nulle rappresenta un'approssimazione di $f(x_0+h)$ (quanto buona è chiarito da $R_{n+1}(h)$)

4) Se $x_0 = 0$ la (▼) diventa

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

(con $0<c<h$ se $h>0$ o $h<c<0$ se $h<0$)

e si parla di formula di McLaurin.

e^x : calcolarne la formula di Mc Laurin arrestata all'ordine 3 con il resto nella forma di Lagrange.

$$f(0+h) = f(0) + f'(0)\,h + \frac{f''(0)}{2!} h^2 + \frac{f'''(0)}{3!} h^3 + \frac{f^{IV}(c)}{4!} h^4$$

con $c \in (0,h)$ se $h>0$
oppure $c \in (h,0)$ se $h<0$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	e^x	1	$1/1 = 1$
1	e^x	1	$1/1 = 1$
2	e^x	1	$1/2$
3	e^x	1	$1/3! = 1/6$
4	e^x	e^c	$e^c/4!$

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 + \frac{e^c}{4!} h^4 \qquad c \in (0,h) \quad \in (h,0)$$

Con il RESTO NELLA FORMA DI PEANO:

arrestata al 2° ordine:

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2} h^2 + o(h^2)$$

arrestata al 3° ordine

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} h^3 + o(h^3)$$

ecc.

Con questa formula posso calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - 1 - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{x}{6} + o(x)}_{\downarrow\, 0} = \frac{1}{2}$$

e in realtà basta la prima (arrestato all'ordine 2)

Posso anche calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)\right) - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0 \qquad \underline{\underline{\text{Ma:}}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^4} = ?$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4/4! + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4!} + o(1) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Dal teorema di Taylor emerge che approssimando

$$f(x_0+h) \quad \text{con} \quad P_n(x_0,h)$$

ciò che si trascura è $o(h^n)$. Per usi pratici (CALCOLO di LIMITI) conviene ricordare anche questa forma del

TEOREMA di TAYLOR (forma di PEANO). Considero $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $x_0\in(a,b)$. Se esistono $f', f'', \dots, f^{(n)}$ in x_0, per ogni $x_0+h\in(a,b)$ si può scrivere

$$(\Delta) \quad f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o(h^n)$$

Questa è la cosidetta forma QUALITATIVA del Teor. di Taylor, mentre la precedente è QUANTITATIVA. Perché?

- Torno al calcolo di $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

  Miglioro l'approssimazione trovando la formula di McLaurin di e^x arrestata al II ordine (nella forma di Peano)

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= e^x \quad \text{in } x_0=0 \text{ vale } 1\\ f'(x) &= e^x \quad \quad '' \\ f''(x) &= e^x \quad \quad '' \end{aligned}\right] \Longrightarrow e^h = 1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)$$

  Visto che $x\to 0$ sostituisco $h=x$ e trovo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2/2+o(x^2)-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

- Se invece voglio "calcolare" $e^{1/2}$ usando la sua approssimazione con il polinomio di McLaurin non è sufficiente rappresentare il resto così, perché voglio sapere se trascuro una parte troppo grande. So che $e^h = 1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{e^c}{3!}h^3$, $0<c<\frac{1}{2}$: posto $h=\frac{1}{2}$, $\frac{e^c}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$: TROPPO?