Due modi di presentare il problema quantitativo

- Un modo è quello appena visto: se approssimo $e^{1/2}$ con $1+1/2+\frac{1}{2}\cdot(1/2)^2 = 13/8$ commetto un errore sicuramente $< \frac{1}{24}$ ma altrettanto sicuramente $> \frac{1}{48}$ poiché $c>0$ implica $R_3 = \frac{e^c}{48} > \frac{e^0}{48} = \frac{1}{48}$.

- Secondo modo: voglio migliorare questa approssimazione in modo che l'errore che commetto sia sicuramente $< 1/100$.

La formula di McLaurin (nella forma di Lagrange) arrestata all'ordine n è
$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} h^{n+1}$$
ove, se $h = 1/2$, si ha $0<c<1/2$ ($\Rightarrow$ posso sempre pensare $e^c < 2$)

Devo trovare n in modo che
$$R_{n+1}(1/2) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{sia} < \frac{1}{100}$$

Vado per tentativi:

$n=2$ non va bene

$n=3$? $\quad R_4(1/2) = \frac{e^c}{4!}\cdot\frac{1}{16} < \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{8} < \frac{1}{100}$: $n=3$ va bene.

Cioè se scrivo $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}$ al posto di $e^{1/2}$ commetto un errore più piccolo di $\frac{1}{100}$ (ma $> \frac{1}{284}$) ....

Polinomio di Taylor di un polinomio $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n = A(x)$

Esistono tutte le possibili derivate. Notare in particolare che
$A^{(n)}(x) = n!\,a_n$ e $A^{(n+1)} = 0$ $\Rightarrow$ Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$
$$A(x) = A(x_0) + A'(x_0)(x-x_0) + \frac{A''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{n!\,a_n}{n!}(x-x_0)^n + 0\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

pol di Taylor in $x_0 = 0$; in x_0 generico

in $x_0 = 0$

n	$P^{(n)}$	$P^{(n)}(0)$	$P^{(n)}(0)/n!$
0	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$	a_0	a_0
1	$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$	a_1	a_1
2	$2a_2 + 6a_3 x$	$2a_2$	$2a_2/2 = a_2$
3	$6a_3$	$6a_3$	$6a_3/6 = a_3$
4	0	0	0

$\Rightarrow$ pol. di Mac Laurin di $P(x)$ è $P(x)$ se lo arresto all'ordine n = grado di $P(x)$

in x_0 generico

n	$P^{(n)}(x_0)/n!$
0	$P(x_0)$
1	$(a_1 + 2a_2 x_0 + 3a_3 x_0^2) = P'(x_0)$
2	$(2a_2 + 6a_3 x_0)/2 \quad = P''(x_0)$
3	$6a_3/6$
4	0

$$P(x_0 + h) = P(x_0) + P'(x_0)h + \frac{P''(x_0)}{2}h^2 + a_3 h^3 + \boxed{0}$$

Resto

$h = x - x_0$

$$= P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 +$$

$$+ a_3 (x - x_0)^3 + \boxed{0}$$

Resto (3+1)-esimo

Cioè arrestando il pol. all'ordine n = grado di $P(x)$ ho ancora un pol. di grado n in $(x - x_0)$ con lo stesso coeff. direttore a_n di $P(x)$ e resto nullo

Caso non polinomiale.

Calcoliamo i polinomi di MacLaurin di alcune funz. elementari, col resto nella forma di Peano (utili nel calcolo di $\boxed{\lim_{x\to 0}}$).

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$$

$$f^{(2k)}(x) = \pm \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$$
$$f^{(1+4k)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(1+4k)}(0) = 1$$
$$f^{(3+4k)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3+4k)}(0) = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Similmente:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)}$$

poiché $D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $D^2(\operatorname{tg} x) = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$

$D^3(\operatorname{tg} x) = 2 \frac{\cos^2 x + 3 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}$ etc. o (meglio) $D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ecc.

Ancora:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{Th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Fare le verifiche, ricordando che il punto iniziale è $x_0 = 0$.

Pol. di MacLaurin di $\tan x$

n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
0	$\tan x$	0	0
1	$1+(\tan x)^2$	1	1
2	$0+2\tan x(1+(\tan x)^2)=2(\tan x-\tan^3 x)$	0	0
3	$2(1+\tan^2 x-3\tan^2 x(1+\tan^2 x))=$ $2(1-2\tan^2 x-3\tan^4 x)$	2	$\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$
4	$2(0-4\tan x(1+\tan^2 x)-$ $12\tan^3 x(1+\tan^2 x))$	0	0

$$\Rightarrow \quad \tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Pol. di Mac Laurin di $\arctan x$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\arctan x$	0	0
1	$\frac{1}{1+x^2}$	1	1
2	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	0	0
3	$-2\frac{[(1+x^2)^{\cancel{2}}-x\cdot 2\cancel{(1+x^2)}\cdot 2x]}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}=$ $=-2\,\frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3}$	-2	$\frac{-2}{3!}=-\frac{1}{3}$

ecc. . .

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\mathrm{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$e^{-x} =$ $\boxed{\text{calcolarlo per esercizio}}$

ma basta sostituire nella formula di Mac Laurin di e^x al posto di x : $-x$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + o(x^n)$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \dots + 2\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$(n = 2k+1)$

Shx

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

Confrontare con:

$$\mathrm{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Analogamente calcolo:

$$\mathrm{Ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Infatti:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\ln(1+x)$	0	0
1	$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$	1	1
2	$-1(1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$	-1	$-1/2$
3	$2(1+x)^{-3}$	2	$2/3! = 1/3$
4	$2(-3)(1+x)^{-4}$	-6	$-3!/4! = -\frac{1}{4}$
5	$2 \cdot 3 \cdot 4 \, (1+x)^{-5}$	$4!$	$\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$
ecc.			

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Infatti:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$(1+x)^\alpha$	1	1
1	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	α	α
2	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\alpha(\alpha-1)$	$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$
3	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$	$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$
$\vdots$			
$n+1$	$\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$	$\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n)$	$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}$

Simbologia: se $\alpha = m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ si ha

$$\frac{m(m-1)\cdot\dots\cdot(m-n)}{(n+1)!} = \frac{m!}{(m-n-1)!\,(n+1)!} = \binom{m}{n+1} \text{ coefficiente binomiale.}$$

per assonanza scrivo $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!} = \binom{\alpha}{n+1}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

in particolare per $\alpha = 1/2$, $n=3$:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{-3/2}{3}\right)x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

per $\alpha = 1/3$ e $n=1$

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x)$$

per $\alpha = 2/3$ e $n = 2$? Farlo per esercizio

$$(1+x)^{2/3} = \dots$$

Applicazione della 2ª formula

1

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - x = [\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) =$$

$\frac{1}{x^2} \to 0$ posso applicare la f. di MacLaurin

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

Ma con gli stessi conti:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x = \frac{1}{3}$$

②

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x-8}+2}{x} = \left[\frac{\sqrt[3]{-8}+2}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} -2\cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{x^3+x-8}{-8}}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -2\cdot \frac{\sqrt[3]{1-\frac{x+x^3}{8}}-1}{x} =$$

$-\frac{x+x^3}{8} \to 0$

f. Mc. Laurin, arrestata al 1° ordine

$$= \lim_{x\to 0} -2\cdot \frac{\cancel{1}+\frac{1}{3}\left(-\frac{x+x^3}{8}\right)-\cancel{1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -2\left(-\frac{1}{24}(1+x^2)\right) = \frac{1}{12}$$

Oppure: razionalizzare tenendo conto che

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Va bene in tutti e due gli esercizi.
Il vantaggio delle f. di ML è che non serve ricordare per ogni n la formula di razionalizzazione e che consente di fare meno conti, specie per n alto:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[6]{64x^6-x^5} - 2x = \lim_{x\to +\infty} 2x\left(\sqrt[6]{1-\frac{1}{64x}}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} 2x\cdot\left(1+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{64x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{3\cdot 64}+o(1)\right) = -\frac{1}{192}$$

qui razionalizzare può essere impegnativo.

$\ln(1+x) = x + o(x)$ $\quad (\ln(1+x) \sim x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x+o(x)) - x}{(1+x)(x+o(x))^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + x^2 + o(x) + x\cdot o(x) - \cancel{x}}{(1+x)(x^2 + 2x\,o(x) + (o(x))^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x) + o(x^2)}{(1+x)(x^2+o(x^2))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x)}{(1+x)\cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{(1+x)\,x^2}$$

NB.
se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$
anche
(1) $\lim_{x\to 0} \frac{x f(x)}{x^{n+1}} = 0$
$\Rightarrow f(x) = o(x^n)$ implica $x f(x) = o(x^{n+1})$
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{(f(x))^2}{x^{n+1}} = 0$

se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$
anche
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \left(\lim_{x\to 0} x\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}\right) = 0$

NON BASTA L'APPROSS. AL NUM.

nuova approssimazione

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x}{(1+x)\,x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2}.$$

Torniamo a

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2} .$$ Risulta $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

Sostituisco questa approssimazione migliore solo dove serve:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(x-x^2/2+o(x^2))-x}{(1+x)\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-x^2/2-x^3/2+o(x^2)-x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Notare che $-x^3/2 = o(x^2)$ e quindi è stato "dimenticato"

Altro esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2+5x^4}{(4\,\mathrm{sen}\,2x+x^3)^3} :$$ approssimo $e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$

$\mathrm{sen}\,2x = 2x+o(x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2+o(x^2)-1-x^2+5x^4}{(4\cdot 2x+o(x)+x^3)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^4+o(x^2)}{(8x+o(x))^3}$$

ATTENZIONE: $x^4 = o(x^2) \Rightarrow 5x^4+o(x^2)=o(x^2)$

Approssimazione insufficiente al numeratore

$\Rightarrow$ approssimo meglio: $e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

Il limite diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4/2+5x^4+o(x^4)}{8^3x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{11/2\,x^4}{8^3\,x^3} = 0 .$$

Una conseguenza dei teoremi di Taylor.

Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ammette derivate $f',\dots,f^{(n)}$ in un intorno di x_0 e $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ ma $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,

se n è pari e
- $f^{(n)}(x_0)>0$: x_0 è pto di minimo rel.
- $f^{(n)}(x_0)<0$: x_0 " " massimo rel

Se n è dispari f ha in x_0 un punto di flesso a tg orizz.

Infatti $f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n+o(h^n)\dots$

T11.2

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + o(h^n)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n + o(h^n)$$

Se n è pari $h^n > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$; $n! > 0$

$\Longrightarrow$ il segno della differenza è dato dal segno di $f^{(n)}(x_0)$: se è > 0 minimo rel. in x_0

se è < 0 massimo rel. in x_0

Se n dispari $h^n > 0$ per $h > 0$
< 0 per $h < 0$ | il segno della differenza cambia $\Rightarrow$ flesso.

ho detto che posso sostituire nelle formule di Mac Laurin al posto di x : kx, x^n e polinomi

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Se la funzione g è "buona" (diciamo derivabile quante volte voglio) posso anche sostituire $f(x)$ = sviluppo di Taylor in $g(f(x))$ ma bisogna stare attenti.

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6} \left((\arctan x)^2 - x^2 + \frac{2}{3} x^4 \right)$$

$x \to 0$ f. M.L.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^3)$$

Sost. la 1ª

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6} \left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 - x^2 + \frac{2}{3} x^4 \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6} \left(\cancel{x^2} - \cancel{\frac{2}{3} x^4} + \frac{x^6}{9} + 2\,o(x^4) + 2\,o(x^6) + (o(x^3))^2 - \cancel{x^2} + \cancel{\frac{2}{3} x^4} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^6} \quad ??$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6} \left(\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \right)^2 - x^2 + \frac{2}{3} x^4 \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6} \left(\cancel{x^2} - \cancel{\frac{2}{3} x^4} + 2\frac{x^6}{5} + \frac{x^6}{9} + \frac{2}{15} x^8 + \frac{x^{10}}{25} + o(x^6) - \cancel{x^2} + \cancel{\frac{2}{3} x^4} \right)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = 23/45$$

Esercizi. Calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \operatorname{sen} x^2}{(1-\cos x^2)^2}$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - 2x}{3x^2}$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^6} \left(\operatorname{arctg}^2 x - x^2 + \frac{2}{3} x^4 \right)$

Determinare il polinomio di Taylor di $\ln x$ di 3° grado con punto iniziale $x_0 = 2$

Usando la formula di McLaurin con il resto nella forma di Lagrange valutare $\operatorname{sen} \frac{1}{3}$ in modo che l'errore commesso sia $< 1/10^3$.