Derivate seconde

Supponiamo che in ogni punto interno di E sia definita f_x e f_y e che queste funzioni abbiano derivate parziali rispetto a x e a y : nascono quattro derivate seconde

$$f_{xx} = (f_x)_x \,, \quad f_{xy} = (f_x)_y \quad f_{yx} = (f_y)_x \quad f_{yy} = (f_y)_y$$

che talora vengono anche indicate così:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \,, \quad \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{\text{derivate miste}} \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Nell'esempio precedente : $f(x,y) = x \ln(xy)$, si ha

$$f_{xx} = (\ln(xy)+1)_x = \frac{1}{x} \quad ; \quad f_{xy} = (\ln(xy)+1)_y = \frac{1}{y}$$

$$f_{yx} = \left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{y} \quad ; \quad f_{yy} = \left(\frac{x}{y}\right)_y = -\frac{x}{y^2}$$

Notiamo che in questo caso $f_{xy} = f_{yx}$. Vale in proposito il

TEOREMA di SCHWARZ : Se le derivate parziali f_x, f_y sono continue in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$ e le derivate miste f_{xy}, f_{yx} sono continue in $(\bar{x},\bar{y})$ allora $f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(\bar{x},\bar{y})$.

Ma consideriamo :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

. In ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$ RISULTA:

$$f_x(x,y) = 2\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad f_y(x,y) = 2\frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2\frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} .$$

Ma in (0,0) - calcolando le derivate come lim. del rapp. incr. - RISULTA:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0 \quad ; \quad f_y(0,0) = \dots = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-2k^5}{k^4 \cdot k} = -2 \,. \quad f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^5}{h^4 \cdot h} = 2$$

Le derivate miste in (0,0) sono diverse!! Infatti la funz. $f_{xy}(x,y)$ non è continua in (0,0)!

Ottimizzazione delle funzioni di 2 variabili

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(\bar{x},\bar{y})$ un punto interno ad E.
Esso si dice punto di massimo locale se esiste un cerchio con centro in $(\bar{x},\bar{y})$ e raggio $\delta > 0$, contenuto in E

$$B_\delta(\bar{x},\bar{y}) = \{(x,y) \in E \mid \sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2} < \delta\}$$

tale che per tutti gli $(x,y) \in B_\delta(\bar{x},\bar{y})$ diversi da $(\bar{x},\bar{y})$ si abbia

$$f(x,y) \leq f(\bar{x},\bar{y})$$

Analogamente per il minimo locale.
Si dice che il massimo (o il minimo) è forte se vale $\underset{\neq}{<}$ $\left(\underset{\neq}{>}\right)$

Vale un analogo del teorema di Fermat (in 1 variabile):

TEOR. Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con f_x, f_y continue in $(\bar{x},\bar{y})$, punto interno a E. Se in $(\bar{x},\bar{y})$ la f ha massimo locale (o minimo locale) allora il gradiente di f in $(\bar{x},\bar{y})$ è nullo.

La cosa è abbastanza logica, poiché mi aspetto che ci sia un piano tangente e mi aspetto che tale piano sia // xOy.
Il teorema precedente è una condizione necessaria: dice tra quali punti cercare gli estremi locali (qualora f sia differenziabile). I punti a gradiente nullo sono detti PUNTI CRITICI: tra essi bisogna distinguere i veri punti estremanti dai punti di sella. Allo scopo si possono guardare le derivate seconde: l'idea che c'è dietro è che si può migliorare l'approssimazione lineare di $f(x,y)$ usando un polinomio di 2° grado invece che di primo:

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})h + f_y(\bar{x},\bar{y})k + f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\frac{h^2}{2} +$$
$$\left(f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + f_{yx}(\bar{x},\bar{y})\right)\frac{hk}{2} + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\frac{k^2}{2} + o(h^2+k^2) \text{ ???}$$

formula di Taylor per funz. di 2 variabili arrestata al I ordine

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + [(\mathrm{grad} f)(\bar{x},\bar{y})]\cdot(h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

$$= f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})h + f_y(\bar{x},\bar{y})k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

arrestata al 2° ordine

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})h + f_y(\bar{x},\bar{y})k +$$

$$+ f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\cdot\frac{h^2}{2} + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\cdot\frac{k^2}{2} +$$

$$+ \left(f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + f_{yx}(\bar{x},\bar{y})\right)\frac{hk}{2} + o(h^2+k^2)$$

La parte quadratica si può rappresentare come prodotto di vettori e matrici

$$\frac{1}{2}\,(h,k)\underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{y},\bar{y}) \end{pmatrix}}_{\text{MATRICE HESSIANA}}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Proviamo a capire che cosa succede quando $f(x,y)$ è proprio un polinomio di 2° grado

1. $f(x,y) = x^2+y^2$ ha minimo locale (e globale) in $(0,0)$

$$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$$
$$f_y = 2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = 2$$

2. $f(x,y) = -(x^2+y^2)$ ha massimo locale (e globale) in $(0,0)$

$$f_x = -2x \Rightarrow f_{xx} = -2 \quad f_{xy} = 0$$
$$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$$

3. $f(x,y) = x^2-y^2$ ha un punto di sella in $(0,0)$

$$f_x = 2x \Rightarrow f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$$
$$f_y = -2y \Rightarrow f_{yx} = f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = -2$$

È poi chiaro che se in questa funzione sostituisco

$\begin{cases} x-y = \sqrt{2}\,u \\ x+y = \sqrt{2}\,v \end{cases}$ ottengo $g(u,v) = 2uv$ che ha grafico che è solo ruotato del precedente e quindi in $(0,0)$ ha ancora un punto di sella. In questo caso

$$g_u = 2v \Rightarrow g_{uu} = 0 \quad g_{uv} = 2$$
$$g_v = 2u \Rightarrow g_{vu} = g_{uv} = 2 \quad g_{vv} = 0$$

Si intuisce quindi che la cosa importante non è il segno della singola derivata seconda. C'è invece un dato che distingue i primi 2 casi dai secondi 2: nel caso 1 e nel caso 2

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} > 0 \,;$$

negli altri due casi il verso della disuguaglianza è opposto.
In effetti, denotato il determinante $\begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix}$

con $H_f(\bar{x},\bar{y})$ (Hessiano di f) si dimostra che

TEOR. $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, dotata di derivate parziali 1ª e 2ª continue. Se $(\bar{x},\bar{y})$ è un punto critico per f (cioè se $(\text{grad} f)(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$)

i) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) < 0$: $(\bar{x},\bar{y})$ non è un estremante

ii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ e $\begin{cases} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) > 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ è pto di min. locale forte} \\ f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) < 0 : (\bar{x},\bar{y}) \text{ " " MAX " "} \end{cases}$

iii) se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) = 0$ si deve procedere ad un'analisi ulteriore.

Un punto critico non estremante viene spesso detto "di sella" anche se la funzione non presenta una vera sella. Vedi $f(x,y) = x^3$ nei punti $(0,y)$.

Nota bene: nelle ipotesi del teorema vale il teor. di Schwartz e quindi $f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(\bar{x},\bar{y})$

Dunque

$$\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix} =$$

$$= f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) - (f_{xy}(\bar{x},\bar{y}))^2$$

Quindi

$$f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) = \mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) + \underbrace{(f_{xy}(\bar{x},\bar{y}))^2}_{\geq 0}$$

Se $\mathcal{H}_f(\bar{x},\bar{y}) > 0$ deve anche essere

$$f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) > 0$$

cioè le due derivate seconde non miste devono essere concordi $\Rightarrow$ posso valutare se $(\bar{x},\bar{y})$ è min. o MAX locale guardando a piacere il segno di $f_{xx}(\bar{x},\bar{y})$ o quello di $f_{yy}(\bar{x},\bar{y})$.

E certamente non ho un estremo locale se tali derivate sono discordi o se una è nulla.

$f(x,y) = x(y^2 - x - 1) = xy^2 - x^2 - x$

det. i punti critici e studiarli.

1°) gradiente di f deve essere $=0$ $\qquad$ $\text{grad} f = (f_x, f_y)$

$f_x = y^2 - 2x - 1$

$f_y = 2xy$

$\text{grad} f = (y^2 - 2x - 1, 2xy) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$ $\qquad$ equivale all'unione V di 2 sistemi

2°) Risolvo

$\begin{cases} y^2 - 2x - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2 - 2x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

$(0,1), (0,-1), (-1/2, 0)$: PUNTI CRITICI

3°) Hessiano

$f_{xx} = -2 \qquad \underline{f_{xy} = 2y \quad f_{yx} = 2y} \qquad f_{yy} = 2x$

so che sono = ma li calcolo per controllo

$$H_f = \begin{vmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(-x - y^2)$$

$H_f(0,1) = 4(0-1) < 0$ sella

$H_f(0,-1) < 0$ sella

$H_f(-1/2, 0) = 4(1/2) > 0$ punto estremante : $f_{xx} = -2 < 0$ MAX LOCALE FORTE.

$$f(x,y) = x\left(x^2 + \frac{y^2}{9} - 1\right) = x^3 + \frac{xy^2}{9} - x$$

continua con derivate di ogni ordine continue in $\mathbb{R}^2$

1°) $\text{grad} f = 0$

$f_x = 3x^2 + \frac{y^2}{9} - 1$

$f_y = \frac{2}{9}xy$

$$\begin{cases} 3x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$$

2°) Risolvo: il sist. è equivalente all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} 3x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 = 1/3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Punti critici: $(0, \pm 3)$, $(\pm\sqrt{1/3}, 0)$

3°) Hessiano

$f_{xx} = 6x \qquad f_{xy} = \frac{2}{9}y$

$f_{yx} = \frac{2}{9}x \qquad f_{yy} = \frac{2}{9}x$

$$H_f = \begin{vmatrix} 6x & 2/9\, y \\ \frac{2}{9}y & \frac{2}{9}x \end{vmatrix} = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{81}y^2$$

$H_f(0, \pm 3) < 0 \qquad (0,3)$ e $(0,-3)$ sono punti di sella

$H_f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} > 0$ estremanti $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ min. loc. forte

$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ MAX loc. forte

$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \implies$ min loc.

Per esercizio: Per ciascuna delle seguenti $f(x,y)$ trovare i punti critici e studiarli:

(1) $f(x,y) = (y-x^3)(y-x)$

(2) $f(x,y) = (x^2-2x)(y+x-1)$

(3) $f(x,y) = y^2 - (x^2-1)^2$

$f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

1) $f_x = 4x^3 - 12xy^2 = 4x(x^2-3y^2)$ $\qquad f_y = -12x^2y + 4y^3 = 4y(-3x^2+y^2)$

$$\begin{cases} x(x^2-3y^2) = 0 \\ y(-3x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ -3x^2+y^2=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2-3y^2=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2-3y^2=0 \\ -3x^2+y^2=0 \end{cases}$

$(0,0)$

è un sistema lineare omogeneo in $x^2=s$ $y^2=t$

$\begin{cases} s-3t=0 \\ -3s+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} s=0 \\ t=0 \end{matrix}$

c'è un solo punto critico:

$(0,0)$

2) $f_{xx} = 12x^2 - 12y^2$

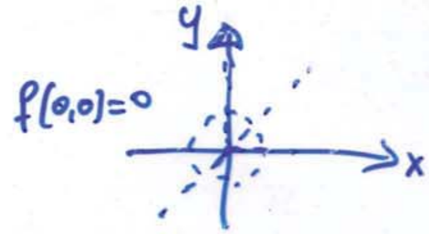
$f_{xy} = -24xy$

$f_{yx} = -24xy$

$f_{yy} = -12x^2 + 12y^2$

$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Devo studiare diversamente:



$f(0,y) = 0 - 0 + y^4 > 0 \quad \forall x \neq 0$

$f(x,0) = x^4 - 0 + 0 > 0 \quad \forall y \neq 0$

è davvero un minimo? Vado a (0,0) lungo la bisettrice del 1°-3° quadrante:

$f(x,x) = x^4 - 6x^4 + x^4 = -4x^4 < 0$

$\Rightarrow$ Sella!

<u>Oppure</u>: passare in coord. polari:

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta.$

$f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \rho^4\cos^4\theta - 6\rho^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + {}$
$+\rho^4\operatorname{sen}^4\theta =$

$= \rho^4(\cos^4\theta \underbrace{-6\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}_{-(2+4)} + \operatorname{sen}^4\theta) =$

$= \rho^4\left((\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2 - 4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\right) =$

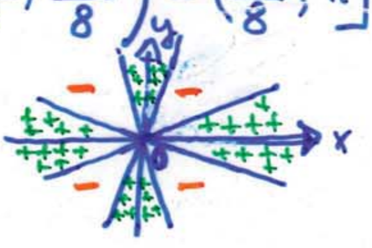
$= \rho^4\left((\cos 2\theta)^2 - (\operatorname{sen} 2\theta)^2\right) =$

$= \rho^4 \cos 4\theta$ studiare come varia il segno quando $\theta \in (-\pi, \pi]$!

$\cos 4\theta > 0$ se e solo se

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 4\theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$:

$\left(-\pi, -\frac{7\pi}{8}\right) \cup \left(-\frac{5}{8}\pi, -\frac{3\pi}{8}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}; \pi\right]$ sono gli intervalli contenuti in $(-\pi, \pi]$ tali che per i punti dei settori corrispondenti $f(x,y) > 0$



ESEMPIO SPINOSO

Studiare i punti critici di $f(x,y)=(y-x^2)(y-1)^2$.

1) $f_x = -2x(y-1)^2 \qquad f_y = (y-1)^2 + 2(y-1)(y-x^2)$

Quindi $\text{grad} f = (0,0) \iff \begin{cases} x(y-1)^2=0 \\ (y-1)(3y-1-2x^2)=0 \end{cases}$

Risolvo: il sistema è equivalente all'unione dei 2 "sistemi"

$$\begin{cases} x=0 \\ 3y-1-2x^2=0 \end{cases} \cup \ \{y-1=0 \quad \text{(ANNULLA ENTRAMBE LE EQ.)}$$

Quindi i punti critici sono $(0, 1/3)$ e $(x, 1)$ con x variabile comunque in $\mathbb{R}$.

$f_{xx} = -2(y-1)^2, \quad f_{xy} = f_{yx} = -4x(y-1), \ f_{yy} = 6y-4-2x^2 \Rightarrow$

$$\mathcal{H}_f = \begin{vmatrix} -2(y-1)^2 & -4x(y-1) \\ -4x(y-1) & 6y-4-2x^2 \end{vmatrix} = 4(y-1)^2(x^2-3y+2-4x^2)$$

Allora:

$\mathcal{H}_f(0, 1/3) = 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2(0-1+2-0) > 0 \Rightarrow (0, \frac{1}{3})$ punto estremante

$f_{xx}(0, 1/3) = -2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 < 0 \Rightarrow (0, \frac{1}{3})$ Punto di Massimo locale forte $f(0, \frac{1}{3}) = 4/27$.

Invece $\mathcal{H}_f(x, 1) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

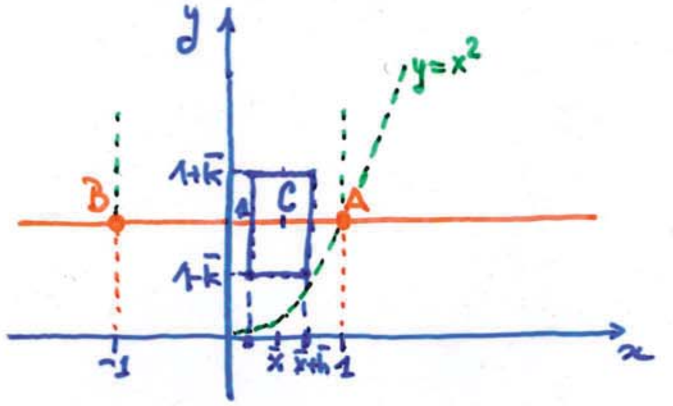
Bisogna vedere che cosa succede in un intorno dei vari punti $(x, 1)$, tenuto conto che $f(x, 1) = 0$.

In $A=(1,1)$ si ha un punto di sella poiché muovendosi lungo una retta parallela all'asse y passante per il punto, cioè considerando $P=(1, 1+k)$ la funzione assume segno diverso a seconda che k sia >0 o <0:

$$f(1, 1+k) = k(k^2) \begin{cases} >0 & \text{per } k>0 \\ <0 & \text{per } k<0 \end{cases}$$

Quindi in un intorno di $(1,1)$, il valore di f non è sempre $\geq$ o sempre $\leq$ del valore di f in $(1,1)$

Allo stesso modo $B = (-1, 1)$ è un punto di sella poiché $f(-1, 1+k) = k(k^2)$ >0 per $k>0$, <0 per $k<0$



Sia ora $|\bar{x}|<1$ e considero

$$f(\bar{x}+h, 1+k) = \left(1+k-(\bar{x}+h)^2\right)k^2$$

Posso prendere il punto "variato" $(\bar{x}+h, 1+k)$ in modo che stia nella regione $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$, cioè sopra la parabola di equazione $y = x^2$: fisso $\bar{h}>0$ con $|\bar{h}| < \min(|x+1|, |x-1|)$ in modo che $|\bar{x}+\bar{h}|<1$ e fisso $\bar{k}$ di conseguenza come illustrato in figura (così che ad es. il punto $(\bar{x}+\bar{h}, 1-\bar{k})$ è ancora "sopra" la parabola).

Su tutti i punti $(\bar{x}+h, 1+k)$ che variano nel rettangolo $\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-\bar{x}| < \bar{h}$ e $|y-1| < \bar{k}\}$

il valore della funzione risulta allora >0 e quindi $> f(\bar{x}, 1)$ $\Rightarrow$ $(\bar{x}, 1)$ è un punto di minimo locale (non forte poiché anche gli altri punti su $y=1$ hanno lo stesso valore)

Similmente se considero $(\bar{x}, 1)$ con $|\bar{x}|>1$ posso individuare tutto un rettangolo $\mathcal{R}$ che contiene $(\bar{x}, 1)$ e sta al di sotto della parabola di equazione $y = x^2$ e quindi tale che in tutti i suoi punti si abbia

$$f(x,y) < 0 = f(\bar{x}, 1)$$

Ne segue che se $|\bar{x}|>1$ i punti $(\bar{x}, 1)$ sono dei MAX locali (non forti).

Esempi di studio di ottimizzazione di tipo teorico

1) Siano dati n punti $P_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ nel piano. Trovare un punto $P = (x, y)$ t.c. la somma dei quadrati delle distanze di P dai P_i sia minima.

$$S(x,y) = \sum_1^n \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]$$

Punti critici: $\begin{cases} S_x = \sum_1^n 2(x-x_i) = 2\left(nx - \sum_1^n x_i\right) = 0 \\ S_y = \sum_1^n 2(y-y_i) = 2\left(ny - \sum_1^n y_i\right) = 0 \end{cases}$

Il punto critico è $\left(\frac{1}{n}\sum x_i, \frac{1}{n}\sum y_i\right)$ ... baricentro

$S_{xx} = 2n = S_{yy}$ mentre $S_{xy} = S_{yx} = 0 \Rightarrow H_S = \begin{vmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{vmatrix} > 0$

$S_{xx} > 0 \Rightarrow$ il baricentro è effettivamente il punto di minimo

2) Metodo dei minimi quadrati

Consideriamo n punti $P_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1 \dots n)$: osservazioni sperimentali di 2 variabili su una certa popolazione. Se supponiamo che tra le due variabili ci sia un legame lineare (entro i limiti dell'errore sperimentale) possiamo cercare la retta $y = ax + b$ che meno si discosta dal passare per gli n punti.

Definiamo errore quadratico totale $E(a,b) = \sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2$ lo minimizziamo: la retta ottenuta in qs modo sarà detta retta di regressione.

$\begin{cases} E_a = \sum 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ E_b = \sum 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\sum(x_i^2 a + x_i b - x_i y_i) = 0 \\ 2\left(a\sum x_i + nb - \sum y_i\right) = 0 \end{cases}$

Chiamo: $\sum x_i^2 = P$, $\sum x_i = Q$, $\sum y_i = R$, $\sum x_i y_i = S$

e riscrivo $\begin{cases} Pa + Qb = S \\ Qa + nb = R \end{cases}$ Nota: $nP - Q^2 = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 > 0$ (*) $\forall n \geq 2$ se gli x_i sono distinti!

$$\Rightarrow \bar{a} = \frac{nS - RQ}{nP - Q^2}, \quad \bar{b} = \frac{PR - SQ}{nP - Q^2}$$

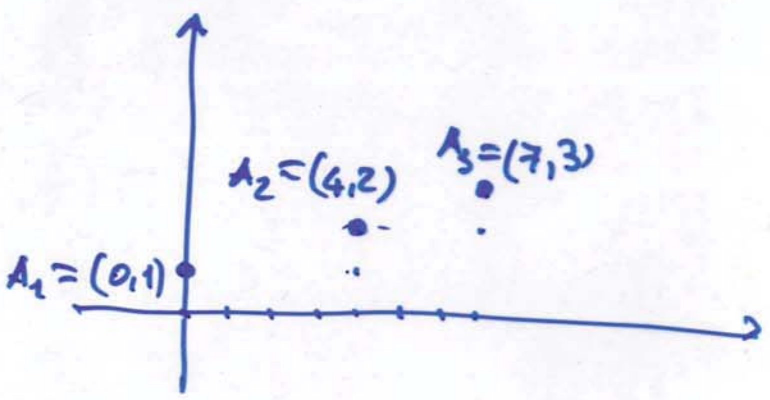
Inoltre $E_{aa} = 2P$, $E_{ab} = 2Q = E_{ba}$, $E_{bb} = 2n \Rightarrow \mathcal{H} = \cancel{4}\begin{vmatrix} P & Q \\ Q & n \end{vmatrix} > 0$

e $P > 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})$ minimo $\Rightarrow$ $y = \bar{a}x + \bar{b}$ è la retta di regressione

---

(*) $n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$

Considero tre punti (osservaz. sperimentali in 2 variabili)



come trovare una retta che sia abbastanza prossima ai 3 punti da pensare che i 3 "stiano" sulla retta
$y = ax+b$
(retta di regressione)?

Voglio che sia minimo l'errore quadratico totale

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{3} (ax_i + b - y_i)^2 =$$

$$= (a\cdot 0 + b - 1)^2 + (a\cdot 4 + b - 2)^2 + (a7 + b - 3)^2$$

$$\text{grad } E(a,b) = \big(2\left(4(4a+b-2) + 7(7a+b-3)\right),\ 2(b-1+4a+b-2+7a+b-3)\big)$$

$$\begin{cases} (16+49)a + (4+7)b = 8+21 \\ (4+7)a + 3b = 6 \end{cases}$$

$a = \frac{21}{74}$ $\quad b = \frac{71}{74}$ $\quad \left(\frac{21}{74}, \frac{71}{74}\right)$ estremante

$$H = 4\begin{vmatrix} 65 & 11 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 4(195-121) > 0$$

$f_{xx} > 0$ MINIMO!

Retta di regressione: $y = \frac{21}{74}x + \frac{71}{74}$