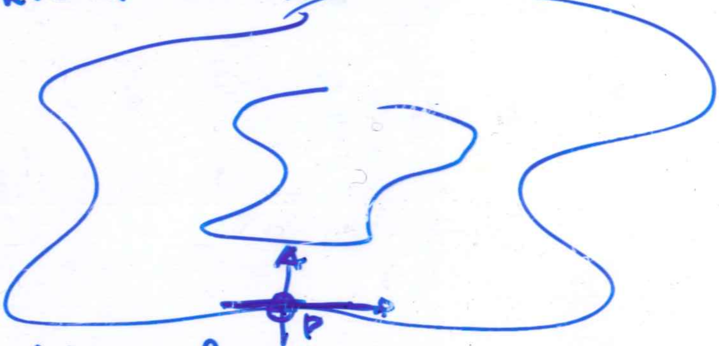
Una curiosità sulle funzioni di 2 variabili.

Posso rappresentare il grafico sul piano xOy congiungendo tutti i punti in cui la funzione assume lo stesso valore (CURVE di LIVELLO)



Allora la direzione del gradiente della f(x) (rappresentata dalle curve di livello in figura) nel punto P è ortogonale alla retta tangente in P alla curva di livello che passa per P

Un'ora di tutoraggio:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x} = \int \frac{(\cos x)^2+(\operatorname{sen}x)^2}{\operatorname{sen}x\cos x}\,dx = \text{Scomposizione}$$

$$= \int \frac{(\cos x)^2}{\operatorname{sen}x\cancel{\cos x}}\,dx + \int \frac{(\operatorname{sen}x)^2}{\cancel{\operatorname{sen}x}\cos x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\,dx + \int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\,dx =$$

$$\boxed{(\operatorname{sen}x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\operatorname{sen}x}$$

$$= \int \frac{(\operatorname{sen}x)'}{\operatorname{sen}x}\,dx - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx =$$

$$= \ln|\operatorname{sen}x| - \ln|\cos x| + c +$$

$$= \ln\frac{|\operatorname{sen}x|}{|\cos x|} + c = \ln\left|\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right| + c =$$

$$= \ln|\operatorname{tg}x| + c.$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}x}\,dx \overset{\substack{dx=2dt\\ x=2t}}{=} \int \frac{2dt}{\operatorname{sen}2t} = \int \frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}\operatorname{sen}t\cos t} =$$

$$= \Big[\ln|\operatorname{tg}t| + c\Big]_{t=\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$

Verificare con i criteri di convergenza che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx \quad \text{converge.}$$

ID $(0,1) \cup (1,+\infty)$

$\boxed{1^a \text{ oss.}}$ $\frac{1}{x^2 \ln x}$ è continua in ciascuno dei 2 intervalli in cui è definita e quindi certamente in $[2,+\infty)$

$\Longrightarrow$ ho integrale improprio di I specie. Inoltre:

Nell'intervallo $[2,+\infty)$ $x^2 \ln x$ è positiva.

2°) posso usare o il criterio del confronto con le disequazioni oppure quello con i limiti.

$\frac{1}{x^2 \ln x} < \frac{1}{x^2}$ è soddisfatta sse $\cancel{x^2} < \cancel{x^2} \ln x$

$\Longleftrightarrow 1 < \ln x$

$\Longleftrightarrow e < x$

Vedo $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx$ come $\underbrace{\int_2^{e} \frac{dx}{x^2 \ln x}}_{\text{DEFINITO}} + \underbrace{\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}}_{\text{lo studio per confronto } \leq}$

Visto che $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge [perché $=$

$= \lim_{z \to +\infty} \int_e^{z} \frac{dx}{x^2} = \lim_{z \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_e^{z} = \lim_{z \to +\infty} -\frac{1}{z} + \frac{1}{e}$

$= \frac{1}{e}$ finito.] anche $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}$ converge

Invece con i limiti: uso ancora $\frac{1}{x^2}$ come funz di confronto

Osservo che per $x \geq 2$

$$0 < \frac{1}{x^2} = g(x)$$

Considero $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 \ln x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$!!

e quindi

se $\underline{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge}}$ allora converge $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$

lo so! È VERO $\Longrightarrow$ è VERO!.

ATTENZIONE NON SI PUÒ USARE COME FUNZIONE DI CONFRONTO $\frac{1}{x \ln x}$ $\left(\text{o } \frac{1}{x} \right)$

perché adesso è vero che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 \ln x}}{\frac{1}{x \ln x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ma $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ diverge e quindi il fatto

che il grafico di $\frac{1}{x^2 \ln x}$ stia "sotto" quello

di $\frac{1}{x \ln x}$ non mi dice niente

Trovare i punti critici di

$$f(x,y) = (x^2-2x)(y+x-1)$$

e studiarli

$f_x = (2x-2)(y+x-1) + (x^2-2x)\cdot 1$

$f_y = x^2-2x$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-1)(y+x-1) + (x^2-2x) = 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \ldots \\ x=0 \text{ o } x=2 \end{matrix}$$

2 sistemi

$$\begin{cases} x=0 \\ -2(y-1) = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=2 \\ 2\cdot 1(y+2-1)+0 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$A = (0,1)$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow (2,-1) = B$$

$f_{xx} = 2(y+x-1) + 2(x-1) + 2(x-1)$

$f_{xy} = f_{yx} = 2(x-1) \qquad f_{yy} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2(y+x-1+2x-2) & 2(x-1) \\ 2(x-1) & 0 \end{vmatrix} = -4(x-1)^2 < 0$$

Punto di SELLA !!

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

In **cinematica** si affronta il problema: dato un corpo - che a un certo istante iniziale t_0 ha una certa posizione e una certa velocità - sottoposto ad una certa accelerazione, qual è l'equazione del moto?

Es.: $a = 0$ $\Rightarrow$ moto rettilineo uniforme

$a = \text{cost.} \neq 0$ $\Rightarrow$ moto rettilineo uniformemente accelerato

$a = -k^2 s$ $\Rightarrow$ moto armonico.

Visto che l'accelerazione è la derivata seconda $\ddot{s}$ dello spostamento s, tutte le equazioni scritte coinvolgono la funzione s e le sue derivate (e - anche se in maniera meno palese - il tempo) e sono perciò **esempi di equazioni differenziali.**

In generale si parla di EQUAZIONE DIFFERENZIALE ogni volta che si ha un'equazione che lega:

- la <u>variabile indipendente</u> t
- un certo numero di sue <u>funzioni</u> (eventualmente costanti) <u>NOTE</u>
- UNA FUNZIONE $y(t)$ e un certo numero di sue DERIVATE da considerare come <u>incognite.</u>

Posso esprimere questo simbolicamente dicendo che l'eq. ha la forma

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

ove F è una funzione di $n+2$ variabili.

L'<u>ordine</u> dell'equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione (: n).

Negli esempi: eq diff. di 2° ordine.

Risolvere un'eq. differenziale significa trovare una funzione $y(t)$ tale che, sostituendo lei e le sue derivate nell'equazione, si trovi un'identità.

In generale l'equazione differenziale da sola non individua univocamente "la soluzione" del problema: questo è il motivo per cui, quando cerco l'equazione del moto di un ben preciso corpo, non mi accontento di dire ad es.:

è sottoposto ad accelerazione nulla

ma do anche le condizioni iniziali relative alla posizione e alla velocità. Anche supponendo di prendere sempre come posizione iniziale

$$s_0 = 0$$

è ben diverso supporre che il corpo abbia una velocità iniziale $v_0 = 1\ m/s$ piuttosto che $v_0 = -1\ m/s$ o $v_0 = 0\ m/s$!

La famiglia di funzioni che (prescindendo dalle condizioni iniziali) sono soluzione di una certa equazione differenziale prende il nome di

integrale generale dell'eq. diff.

Il problema di stabilire quale delle funzioni di tale famiglia (= soluzione particolare) soddisfa determinate condizioni iniziali prende il nome di PROBLEMA di CAUCHY.

Come sempre quando si parla di equazioni, ci sono due aspetti del problema: la risolubilità e il calcolo effettivo delle soluzioni.

OSS. Perché chiamare integrale generale l'insieme di tutte le funzioni sol. dell'eq. diff.?
Perché il problema di risolvere eq. diff. è una generalizzazione di un'altro ben noto problema:

$y'(t) = f(t)$ è un'equazione differenziale; risolverla significa trovare tutte le primitive di $f(t)$, cioè calcolare $\int f(t)\,dt$.

E' ben noto che se $f(t)$ è continua le primitive esistono, sono infinite e che se $F(t)$ è una di esse tutte le altre hanno la forma

$$F(t)+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

In questo caso posso individuare univocamente la funzione "soluzione particolare" dando la condizione iniziale

$$y(t_0) = y_0 .$$

Trovo infatti $F(t_0) + c = y_0 \Rightarrow c = y_0 - F(t_0)$
Quindi in questo caso il problema di Cauchy è risolto dalla funzione $y(t) = F(t) - F(t_0) + y_0$

Equazione di questo tipo è $\ddot{s} = a$, pensata come equazione differenziale in $\dot{s}$:
$\dot{s} = at + c$ è l'integrale generale e se pongo $\dot{s}(0) = v$ trovo $c = v \Rightarrow$ soluzione particolare: $\dot{s} = at + v$.

A sua volta questa può essere pensata come equazione diff. (dello stesso tipo visto sopra) in s:
$s = \frac{1}{2}at^2 + vt + c$ integrale generale e se $s(0) = 0 \Rightarrow$ soluz. particolare $s = \frac{1}{2}at^2 + vt$.

STUDIAMO e cerchiamo di risolvere

EQ. DIFF. del 1^o ordine "particolari"

1) a variabili separabili

2) lineari < omogenee / complete

EQ. DIFF. del 2^o ordine

lineari a coefficienti costanti

omog / complete

---

prima ci diamo strumenti per stabilire sotto quali condizioni siano risolubili e abbia sol. il probl. di Cauchy

EQ. DIFF. del 1° ordine

Hanno la forma: $F(t, y(t), y'(t)) = 0$

Ogni funzione $\varphi(t)$ derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e tale che $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$ è una soluzione.

Delle equazioni del 1° ordine quelle che si studiano meglio sono le cosiddette eq. diff. del 1° ordine in FORMA NORMALE:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Per esse vale il seguente teorema (che garantisce la risolubilità del problema di Cauchy):

TEOR. Se $f(t,y)$ e $f_y(t,y)$ sono entrambe continue allorché t varia in $I := [t_0 - a, t_0 + a]$ e y varia in $\mathbb{R}$, allora esiste un'unica funzione $y(t)$, definita in un intorno di t_0 e ivi continua e derivabile soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: non è comunque detto che l'integrale sia ricavabile in forma esplicita: in caso negativo si ricorre a metodi di "integrazione approssimata" (Eulero, Runge-Kutta, ...).

Noi ci occuperemo di due situazioni in cui l'integrale si ricava in forma analitica e talora esplicita:

- equazioni differenziali a variabili separabili
- equazioni " lineari del 1° ordine.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Siano $a(t)$ e $b(y)$ due funzioni continue rispettivamente su due intervalli I e J di $\mathbb{R}$. Un'eq. diff. del tipo

$$y'(t) = a(t)\, b(y)$$

è detta a variabili separabili.

Se $\bar{y}$ è uno zero di $b(y)$, la funzione

$$y(t) = \bar{y}$$

è una soluzione.

Su ogni intervallo $J' \subseteq J$ in cui $b(y) \neq 0$ l'eq. diff. si riscrive come

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)\, dt \qquad \left(y'(t) = \frac{dy}{dt} \right)$$

Così abbiamo separato le due variabili y e t.

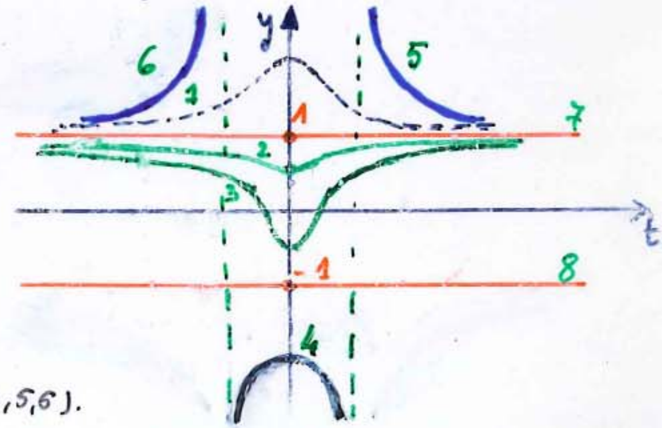
Allora l'integrale generale - in forma implicita - è dato da

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)\, dt + c$$

Perché il problema di Cauchy abbia una e una sola soluzione definita in un intorno di t_0 basterà che $b(y)$ sia derivabile con derivata prima continua in un intorno di $y_0 = y(t_0)$.

Nei nostri esempi funzionerà.

Bisognerà però stare attenti a scegliere l'espressione corretta dell'integrale generale in dipendenza da y_0 e l'intervallo che si pensa come dominio in dipendenza da t_0.



IN FIGURA sono sommariamente rappresentati 8 integrali particolari dell'eq. diff. del successivo ES. 1.
Ma a seconda della scelta di y_0 ($\geq$ oppure < -1) e del corrispettivo valore t_0 si devono seguire curve diverse. Possono cambiare i domini (vedi 4, 5, 6).

Spiegazione dettagliata della ricerca di soluzioni di un'eq. diff. a variabili separabili

$$y'(t) = a(t)\, b(y)$$

Sol part

$y = \bar{y}$ ove $b(\bar{y}) = 0$

$$\int \frac{y'(t)\,dt}{b(y)} = \int a(t)\,dt$$

$$y'(t)\,dt = dy$$

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)\,dt$$

non è detto che li si sappiano calcolare

Comunque di qui uscirebbe una Soluz. in forma IMPLICITA

$$F(y) = A(t) + c$$

Però,

se $b(y)$ ha derivata prima continua in J (in cui $b(y)$ è continua) vale il teor di Cauchy:

per ogni punto $(t_0, y_0) \in I \times J$ passa 1 e 1 sol grafico di funzione soluzione dell'eq.:

$$y'(t) = a(t)\, b(y)$$

$\Rightarrow$ i grafici di due soluzioni non si intersecano mai.

Ad es. se i grafici nella figura precedente sono le soluz. di un'eq. diff. con queste proprietà, le soluzioni costanti (in rosso) non possono essere oltrepassate dalle altre

Proviamo a trovare l'integrale generale di una semplice E.D.

$$y' + ty - t = 0$$

visto che si può scrivere

$y' = -ty + t$, cioè $y' = t(1-y)$

è a variabili separabili: $a(t) = t$
$b(y) = 1-y$

$a(t)$ e $b(y)$ sono continue con derivata 1ª continua su $\mathbb{R}$ ($\to \exists$ ed è unica la sol. del problema di Cauchy per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$)

1°) soluzioni costanti: se pongo $b(y) = 1-y = 0$ vedo che $\boxed{y(t) = 1}$ è una soluzione

2°) $$\int \frac{y' dt}{1-y} = \int t\, dt$$

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int t\, dt$$

$$-\ln|1-y| = \frac{t^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln|1-y| = -\frac{t^2}{2} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$ soluzione in forma implicita

$$|1-y| = e^{-\frac{t^2}{2} + k}$$

$$1-y = \pm e^{-\frac{t^2}{2}+k} = \boxed{\pm e^k} e^{-\frac{t^2}{2}}, \; k \in \mathbb{R}$$

Osservo che se k varia in $\mathbb{R}$, $\pm e^k$ rappresenta tutti i numeri reali $C \neq 0$. Posso allora riscrivere

$$y(t) = 1 - C e^{-t^2/2} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$ Sol. in forma esplicita

... in realtà posso prendere $C \in \mathbb{R}$, poiché $C = 0$ rappresenta la soluzione costante $y(t) = 1$.