ES. 1 Determinare le soluzioni dell'eq. diff.

(*) $$y'(t) = 2t\,(1-(y(t))^2)$$

che soddisfino le seguenti condizioni iniziali:

A) $y(0)=2$ B) $y(0)=1$ C) $y(0)=\frac{1}{2}$

D) $y(0)=-2$ E) $y(h)=-2$ con $h\in\mathbb{R}$ F) $y(\sqrt{\ln 2})=7$

$\boxed{\text{Sol.}}$ $y'=2t(1-y^2)$ è una eq. diff. A VARIABILI SEPARABILI:

$a(t)=2t$ è continua in $I=\mathbb{R}$

$b(y)=1-y^2$ è cont. in $J=\mathbb{R}$ e anche

$b_y(y)=-2y$ è cont. in $J=\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ per ogni condizione iniziale c'è una e una sola soluzione di (*) che la realizza.

<u>1° passo</u>: determino l'integrale generale di (*) in forma implicita.

- $b(y)=1-y^2=0$ per $y=\pm 1$ $\Rightarrow$ la (*) ha due soluzioni costanti

  $\boxed{y(t)=1}$ e $y(t)=-1$

  La prima è <u>la soluzione che soddisfa la condizione (B)</u>.

- Se $b(y)\neq 0$ separo le variabili:

  $$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int 2t\,dt \qquad (**)$$

  <u>Attenzione:</u> $\dfrac{1}{b(y)}$ è continua su ciascuno dei singoli intervalli $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$: le primitive corrispondenti sono definite sui singoli intervalli.

Calcolo:

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = -\int \frac{dy}{y^2-1} = -\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + c_1 \quad , \quad \text{con } c_1 \in \mathbb{R}$$

Quindi la (**) equivale a

$$\frac{1}{2} \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + c_1 = t^2 + c_2 \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

o - più semplicemente, posto $c = 2(c_2 - c_1)$ - :

$$(***) \qquad \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = 2t^2 + c \, , \quad c \in \mathbb{R}$$

Questo è l'integrale generale in forma implicita.

2° passo: passaggio a forma esplicita.

Se non fossero assegnate le condizioni iniziali potrei riscrivere la (***) come

$$\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = e^{2t^2+c}$$

cioè

$$\frac{y+1}{y-1} = \pm e^{2t^2+c}$$

ove il segno $\boxed{+}$ va scelto se si vogliono soluzioni con $y(t) > 1$ oppure $y(t) < -1$ e il segno $\boxed{-}$ va scelto se le si vogliono con $y(t) \in (-1,1)$.

Tenuto conto che $\pm e^{2t^2+c} = (\pm e^c) \cdot e^{2t^2}$ e che $\pm e^c$ al variare di c in $\mathbb{R}$ descrive TUTTI i numeri REALI NON NULLI, si può scrivere

$$\frac{y+1}{y-1} = k e^{2t^2} \qquad \text{con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

cioè $\quad y(1 - ke^{2t^2}) = -1 - ke^{2t^2} \Rightarrow y(t) = \dfrac{ke^{2t^2}+1}{ke^{2t^2}-1}$

ove $k > 0$ dà le sol. con $|y(t)| > 1$ e $k < 0$ dà le sol. con $|y(t)| < 1$.

Ma in realtà il problema assegna delle condizioni iniziali. Allora, CONVIENE OPERARE COSÌ

2° passo in presenza di PROBLEMA di CAUCHY

- Consideriamo il caso A): $\begin{cases} y' = 2t\,(1-y^2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Poiché $y(0) > 1$ e poiché il grafico di questa soluz. non può attraversare quello della sol. costante $y(t)=1$ (TEOR. di CAUCHY!) si deve avere $y(t) > 1$. Dunque $\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \frac{y+1}{y-1}$.

In (***): $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + c$ sostituisco $t=0$ e $y=2$:

$$\ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right) = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = \ln 3$$

Quindi la sol. in forma implicita del problema di Cauchy è

$$\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + \ln 3$$

cioè

$$\frac{y+1}{y-1} = e^{\ln 3} \cdot e^{2t^2}$$

$$\Rightarrow \quad y+1 = 3e^{2t^2}(y-1) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{3e^{2t^2}+1}{3e^{2t^2}-1}$$

o, se si preferisce: $y(t) = 1 + \frac{2}{3e^{2t^2}-1}$

che mette in evidenza che $y(t) > 1\ \forall t \in \mathbb{R}$, che $y(t)$ è pari, ha massimo in $t=0$ e asintoto orizzontale $y=1$.

VEDERE curva 1 nel grafico a pag Ed 5.

- Il caso (B) è già stato esaminato: non sarebbe stato possibile recuperarlo da (***) (essendo $y-1$ al denominatore).

- caso C) : $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

La condizione iniziale impone che $|y(t)| < 1$ e quindi $\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \frac{y+1}{1-y}$. In (***): $\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) = 2t^2 + c$

sostituisco $t=0$, $y = \frac{1}{2}$

$$\ln\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 0 + c \qquad \Rightarrow c = \ln 3$$

$\Rightarrow$ sol. in forma implicita : $\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) = 2t^2 + \ln 3$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{1-y} = 3e^{2t^2} \quad \Rightarrow y+1 = 3e^{2t^2}(1-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{3e^{2t^2}-1}{3e^{2t^2}+1} = 1 - \frac{2}{3e^{2t^2}+1}$$

che evidenzia che la soluzione è definita $\forall t \in \mathbb{R}$, sempre < 1 ma $\geq \frac{1}{2}$ (che risulta essere il minimo, assunto in $t=0$), pari e dotata di asintoto orizzontale $y = 1$ (VEDI curva 2 nel grafico a pag Ed5)

- caso D) : $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(0) = -2 \end{cases}$

In questo caso $y(t) < -1$.
Sostituendo $t=0$ e $y=-2$ in (***): $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + c$:

$$\ln\left(\frac{-2+1}{-2-1}\right) = 0 + c \qquad \Rightarrow c = -\ln 3$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 - \ln 3 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} = \frac{1}{3}e^{2t^2}$$

$$\Rightarrow 3(y+1) = (y-1)e^{2t^2} \Rightarrow y(t) = \frac{e^{2t^2}+3}{e^{2t^2}-3} \Rightarrow$$

$y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2t^2}-3}$: <u>attenzione</u> il dominio di questa soluzione deve contenere $t=0$

Dovendo essere $e^{2t^2}-3 \neq 0$, cioè $t^2 \neq \frac{1}{2}\ln 3$, il dominio della soluzione è $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}, \sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}\right)$

- caso E) : $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(h) = -2 \end{cases}$ con $h \in \mathbb{R}$

Anche in questo caso $y(t) < -1$

Sostituendo $t = h$ e $y = -2$ in $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + c$:

$$-\ln 3 = 2h^2 + c \Rightarrow c = -\ln 3 - 2h^2$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y-1} = \frac{1}{3} e^{2(t^2-h^2)} \Rightarrow \dots\ y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2(t^2-h^2)} - 3}$$

Anche quì: $e^{2(t^2-h^2)} \neq 3 \Rightarrow t^2 \neq h^2 + \frac{1}{2}\ln 3$

$\Rightarrow$ dominio contenente t=h è l'intervallo simmetrico rispetto all'origine $\left(-\sqrt{h^2+\frac{1}{2}\ln 3}, \sqrt{h^2+\frac{1}{2}\ln 3}\right)$

- caso F) : $\begin{cases} y' = 2t(1-y^2) \\ y(\sqrt{\ln 2}) = 7 \end{cases}$

In questo caso si avrà $y(t) > 1$ là dove è definito

Sostituendo $t = \sqrt{\ln 2}$ e $y = 7$ in $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 2t^2 + c$:

$$\ln \frac{8}{6} = 2\ln 2 + c \Rightarrow c = -\ln 3$$

$$\dots \Rightarrow y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2t^2} - 3}$$

La legge è identica a quella del caso (D) ma in questo caso, visto che $\sqrt{\ln 2} > \sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}$ (★) il dominio della soluzione è $\left(\sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}, +\infty\right)$

(★) Infatti
$4 > 3$
$\Downarrow$
$\ln 4 > \ln 3$
$\Downarrow$
$\ln 2 > \frac{1}{2}\ln 3$
$\Downarrow$
$\sqrt{\ln 2} > \sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}$

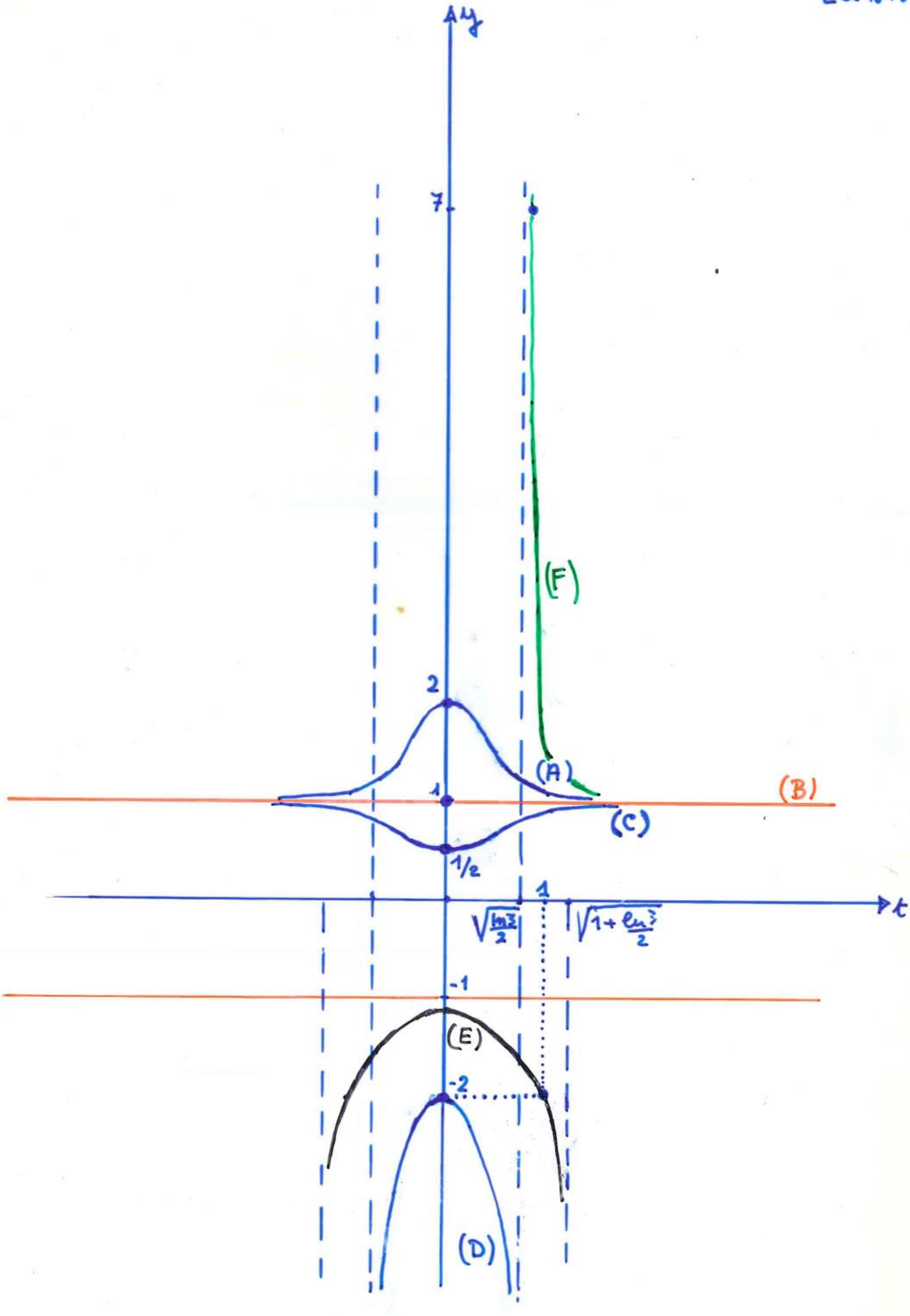
Cioè per rappresentare correttamente la soluzione bisogna fornire LEGGE + DOMINIO. Qui la sol. è

$$y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2t^2} - 3}, \quad t \in \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\ln 3}, +\infty\right)$$

nel caso (D) è

$$y(t) = 1 + \frac{6}{e^{2t^2} - 3}, \quad t \in \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}\ln 3}, \sqrt{\tfrac{1}{2}\ln 3}\right)$$

Ed 6.5



Es 2 EQUAZIONE LOGISTICA: $y' = ay(1-by)$ con a, b costanti >0

In questo caso $a(t) = a$ $\quad b(y) = y(1-by)$

$\Rightarrow$ soluzioni costanti : $y = 0 \quad y = \frac{1}{b}$

Ponendosi in uno degli intervalli $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, 1/b)$
$J_2 = (1/b, +\infty)$ si passa a

$$\int \frac{dy}{y(1-by)} = \int a\,dt \qquad \text{RICORDARE: } \frac{1}{y(1-by)} = \frac{1}{y} + \frac{b}{1-by}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{1-by}\right| = at + c \iff \left|\frac{y}{1-by}\right| = e^{at+c} \iff$$

$$\frac{y}{1-by} = \pm e^c \cdot e^{at}$$ e ponendo $k = \pm e^c$, cioè k costante arbitraria non nulla:

$$\frac{y}{1-by} = k e^{at}$$, cioè risolvendo rispetto a y

$$y(t) = \frac{k e^{at}}{1 + bk e^{at}}.$$

NOTA: visto che $b(y)$ è un polinomio (e quindi derivabile con derivata prima continua), il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ay(1-by) \\ y'(t_0) = y_0 \end{cases}$$ è risolubile.

cioè, per ogni punto (t_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$ passa una e una sola CURVA INTEGRALE (grafico di una soluzione particolare).

Studiamo le curve integrali di un'equazione logistica particolare, (per vedere come vanno)

$a = 1,\ b = \frac{1}{2}$

sol. costanti: $y=0, y=2$

$y' = y\left(1-\frac{1}{2}y\right)$ $\Rightarrow$ integrale generale $y = \frac{2k}{2e^{-t}+k}$

$y'' = y' - \frac{1}{2}\cdot 2yy' = \frac{1}{2}y(1-y)(2-y)$

Se $k>0$ (cioè se $\frac{y}{1-\frac{1}{2}y} = ke^t > 0$ e quindi $0<y<2$)

a) $y(t)$ è definita derivabile e positiva per ogni $t\in\mathbb{R}$.

b) $y'(t) = \frac{1}{2}y(t)(2-y(t))$ è positiva $\forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow y(t)$ cresce

e $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 2$

c) $y''(t) = \frac{1}{2}y(t)(1-y(t))(2-y(t)) > 0$ se $0<y(t)<1$
< 0 se $1<y(t)<2$

$\Rightarrow$ se $y(t) = \frac{2k}{2e^{-t}+k} = 1$ cioè se $t = \ln\frac{2}{k}$ c'è un flesso e in esso la tangente ha coefficiente angolare

$y'(\ln 2/k) = 1\cdot(1-1/2) = 1/2$ INDIPENDENTE DA k

d) individuo una sol. particolare ponendo ad es. $y(0)=y_0$ con $0<y_0<2$

Invece se $k<0$, cioè $y(t)<0$ oppure $y(t)>2$

a) • $y(t)$ è definita derivabile e positiva $\Leftrightarrow$ $2e^{-t}+k<0$ cioè per $t>\ln\left(\frac{-2}{k}\right)$
• $y(t)$ " " e negativa $\Leftrightarrow t<\ln(-2/k)$

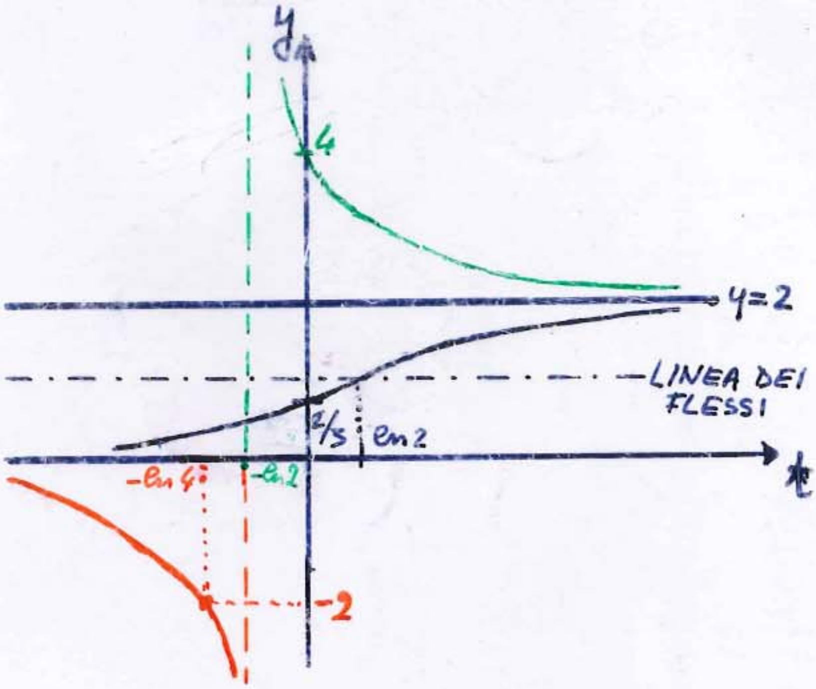
LIMITI COME SOPRA

b) $y'(t)<0$ su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, \ln(-2/k))$
$(\ln(-2/k), +\infty)$

c) $y''(t)>0$ se $y(t)>2$ cioè per $t>\ln\left(\frac{-2}{k}\right)$: $y(t)$ convessa
<0 se $y(t)<0$ cioè per $t<\ln\left(\frac{-2}{k}\right)$: $y(t)$ concava

DA NOTARE CHE anche se il valore di k che compare è lo stesso, le soluzioni particolari definite sui due intervalli $(-\infty, \ln\left(\frac{-2}{k}\right))$ e $(\ln\left(\frac{-2}{k}\right), +\infty)$ allorché $k<0$ SONO DUE DIVERSE: esse corrispondono ad aver scelto 2 diverse "condizioni iniziali": $y(t_1)=y_1$ con $y_1<0$

oppure : $y(t_2)=y_2$ con $y_2>0$



$y(0) = 2/3 \Rightarrow$

$2k = \frac{2}{3}(k+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow k=1 \Rightarrow$

flesso: $(\ln 2, 1)$

$y(0) = 4 \Rightarrow$

$2k = 4(k+2) \Rightarrow k=-4$

$\Rightarrow$ definita in $(-\ln 2, +\infty)$

$y(-\ln 4) = -2 \Rightarrow 2k = -2(2e^{\ln 4}+k) \Rightarrow -k = e^{\ln 4} = 4 \;:\; k=-4$

Ma questa soluzione è definita (e derivabile) in $(-\infty, -\ln 2)$

In sostanza: per ogni punto dei due semipiani $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y>2\}$ e $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y<0\}$ passa una soluzione particolare, che però NON È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$, ma solo su una semiretta.

Invece le soluzioni che passano per un punto della fascia $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2\}$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Un esempio di equazione logistica è dovuta a Verhulst (1845) e fornisce un modello per la dinamica delle popolazioni:

$$N'(t) = \varepsilon\, N(t)\left(1 - \frac{1}{C} N(t)\right)$$

ove $N(t)$ = numero di individui al tempo t di una popolazione isolata

$\varepsilon = \lambda - \mu$: potenziale biologico

λ : tasso di fertilità (= numero di nuovi nati per individuo nell'unità di tempo)

μ : tasso di mortalità (= numero di morti per individuo nell'unità di tempo)

C = capacità dell'ambiente.

Imponendo la condizione iniziale $N(0) = N_0 > 0$ si determina l'andamento della popolazione. Soluzioni di EQUILIBRIO: $N(t)=0$, $N(t)=C$

In una reazione chimica tra due reagenti A e B si produce una certa sostanza X.

Chiamiamo: $x(t)$ la concentrazione di X all'istante t;

a la concentrazione di A all'ist. $t=0$

b " " " B " " $t=0$

Sotto opportune ipotesi, si sa che la variazione istantanea della concentrazione di X è proporzionale al prodotto

$$k\,(a-x(t))\,(b-x(t)) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ove k è una costante positiva che dipende dai reagenti.

Come posso ricavare $x(t)$?

$$x'(t) = k(a-x(t))(b-x(t))$$

$a, b > 0$

Ed 9.2

$$\begin{cases} x' = k\,(a-x)\,(b-x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

eq. diff. 1° ordine a var. separabili

$a(t) = k$

$b(x) = (a-x)\,(b-x)$ $\Rightarrow$ sol costanti

$x(t) = a$
$x(t) = b$

non soddisfano $x(0)=0$
e quindi le posso
trascurare

Posso separare le variabili

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int k\,dt$$

1° caso $\boxed{a=b}$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = kt + c$$

$-\dfrac{1}{x-a} = kt + c$: da $x(0)=0$ deduco

$\dfrac{-1}{0-a} = 0 + c \Rightarrow c = \dfrac{1}{a} \Rightarrow$

la soluzione $x(t)$ dipende da t secondo la legge

$$\frac{1}{a-x} = kt + \frac{1}{a} \Longrightarrow$$

$$a - x = \frac{1}{kt + \frac{1}{a}} \Rightarrow x = a - \frac{a}{kat+1} = \frac{ka^2t}{kat+1}$$

Ed 9.3

$a \neq b$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} =$$

$$= \frac{(A+B)x - Ab - aB}{(x-a)(x-b)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-aB=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A \\ A(a-b)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=\frac{-1}{a-b} \\ A=\frac{1}{a-b} \end{cases}$$

$$\frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)dx = kt + c$$

$$\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = kt + c \quad \text{ie } \varphi(0)=0$$

$$\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{-a}{-b}\right| = 0 + c \quad \left(\Rightarrow \left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \frac{x-a}{x-b}\right)$$

$$c = \frac{1}{a-b}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{1}{a-b}\ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right) = kt + \frac{1}{a-b}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right) = (a-b)kt \implies$$

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b} = e^{(a-b)kt} \implies$$

$$b(x-a) = a e^{(a-b)kt}(x-b) \implies$$

Ed 94

$$x\left(b - a e^{(a-b)kt}\right) = ab - ab\, e^{(a-b)kt}$$

cioè la sol. è

$$x(t) = ab\, \frac{1 - e^{(a-b)kt}}{b - a e^{(a-b)kt}}$$

La soluzione è simmetrica in a e b, come si vede moltiplicando numeratore e denominatore per $-e^{(b-a)kt}$ (che è certamente $\neq 0$!):

$$x(t) = ab\, \frac{-e^{(b-a)kt} + 1}{-b e^{(b-a)kt} + a}$$

Si vede che

se $b > a$: $\quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = \cancel{a}\cancel{b} \cdot \frac{1}{\cancel{b}} = a$

Esercizio da fare a casa:

Trovare l'integrale generale di

$$y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|}$$

N.B. l'eq. diff. è certamente a var. separabili con

$a(t) = 1$ cont. $\qquad b(y) = 2\sqrt{|y|}$ continua

ATTENZIONE: $b'(y) = \dfrac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{|y|}}$ non è definita per $y = 0$

ma la sol. costante $y(t) = 0$ viene isolata prima di separare le variabili. Allora $\forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ oppure $\in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ esiste 1 e 1 sola soluzione del problema di Cauchy $\{ y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|},\ y(t_0) = y_0 \}$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 1° ORDINE

L'eq. di Verhulst è un aggiustamento della più celebre (anche se meno adeguata) equazione di MALTHUS (1798):

$$(*) \qquad N'(t) = \varepsilon N(t)$$

che si ottiene osservando che (se trascuro la capacità dell'ambiente) la funzione $(\lambda-\mu)N(t)$ esprime l'incremento - o la diminuzione - di popolazione nell'unità di tempo, cioè

$$(\lambda-\mu)N(t) = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

e facendo tendere a 0 il Δt.

Un'eq. come la (*) viene detta eq. diff. LINEARE del 1° ordine OMOGENEA.

In generale parlo di eq. diff. LINEARE del 1° ordine quando nell'equazione che lega $y(t)$ e $y'(t)$ queste due funzioni compaiono con grado 1: dunque queste hanno la forma

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t) \qquad \text{con } a(t) \text{ e } f(t) \text{ continue su } I \subset \mathbb{R}$$

Se $f(t)=0$ si parla di EQUAZIONE diff. lineare OMOGENEA
Altrimenti " " EQUAZIONE diff. lineare COMPLETA.

TEOREMA: L'integrale generale dell'equazione completa

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

si ottiene aggiungendo all'integrale generale della omogenea associata

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

una soluzione particolare di quella completa

STESSA SITUAZIONE CHE NEI SISTEMI LINEARI ... o della determinazione dell'integrale indefinito di una funz. cont.

La dimostrazione del teorema si compone di 2 parti: (*)

(I) Sia $\bar{y}(t)$ sia una soluzione di

(1) $$y' + a(t)y = f(t) \quad : \bar{y}'(t) = -a(t)\bar{y}(t) + f(t)$$

e $z(t)$ sia una soluz. di

(2) $$y' + a(t)y = 0 \quad : z'(t) = -a(t)z(t)$$

Mostro che $y(t) = \bar{y}(t) + z(t)$ è una soluzione di (1)

Infatti

$$y'(t) = \bar{y}'(t) + z'(t) = \underbrace{-a(t)\bar{y}(t) + f(t)}\ \underbrace{-\ a(t)z(t)}$$

e quindi

$$(\bar{y}+z)'(t) + a(t)(\bar{y}+z) = f(t)$$: cioè $\bar{y}+z$ è sol. di (1)

II) Siano $\bar{y}(t)$ e $\bar{\bar{y}}(t)$ due soluzioni di

(1) $$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

mostro che $\bar{\bar{y}}(t) - \bar{y}(t)$ è soluz. di (2):

$$(\bar{\bar{y}}(t) - \bar{y}(t))' + a(t)(\bar{\bar{y}}(t) - \bar{y}(t)) =$$
$$= (\bar{\bar{y}}'(t) + a(t)\bar{\bar{y}}(t)) - (\bar{y}'(t) + a(t)\bar{y}(t)) = f(t) - f(t) = 0.$$

c.v.d.

PROBLEMI

(1°) Come si trovano le soluz. dell'omogenea?

(2°) Come trovo una sol. partic.?

(*) NOTA BENE: le due parti sono la generalizzazione di quanto visto per le primitive: 1) mostro che se $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$ e $c \in \mathbb{R}$ anche $F(t)+c$ è una primitiva di $f(t)$; 2) mostro che se $F(t)$ e $G(t)$ sono prim. di $f(t)$, allora $F(t)-G(t) = c \in \mathbb{R}$ (TEOR di LAGRANGE). Da 1) e 2) deduco che le prim. di $f(t)$ sono tutte e sole $F(t)+c$, $c \in \mathbb{R}$

Soluzione dell'equazione omogenea

$y'(t) = -a(t)\, y(t)$ è un'equazione a variabili separabili!

Ha una soluzione costante: $y(t) = 0$

mentre se $y(t) \not\equiv 0$ si ha

$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)dt$ cioè $\ln|y| = -A(t) + k$, $k \in \mathbb{R}$

($A(t)$ primitiva di $a(t)$)

cioè $y = \pm e^{k} \cdot e^{-A(t)}$ cioè $y = c\, e^{-A(t)}$ con $c \neq 0$.

Dando a c la possibilità di annullarsi, si rappresenta anche la soluzione costante. Quindi l'integrale generale è

$$y(t) = c\, e^{-A(t)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

ES. Le soluzioni dell'equazione di Malthus hanno la forma $N(t) = c\, e^{\varepsilon t}$ .... CRESCITA o DECADIMENTO ESPONENZIALE.

Ricerca di una soluzione particolare

Usiamo il metodo DELLA VARIAZIONE DELLA COSTANTE, cioè cerchiamo la soluzione tra le funzioni della forma

$$\bar{y}(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$$

ove $c(t)$ non è più costante.

$\bar{y}'(t) = (c'(t) - c(t)a(t))\, e^{-A(t)}$: quindi sostituendo nell'eq. differenziale COMPLETA devo avere

$(c'(t) - c(t)a(t))e^{-A(t)} + a(t)c(t)e^{-A(t)} = f(t)$ cioè

$c'(t)\, e^{-A(t)} = f(t)$ o anche $c'(t) = f(t)\, e^{A(t)}$

cioè $c(t)$ è una primitiva di $f(t)e^{A(t)}$: $G(t)$

$\Rightarrow \bar{y}(t) = G(t)\, e^{-A(t)}$

Dunque l'integrale generale di

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

ha la forma

$$y(t) = \left(c + G(t)\right) e^{-A(t)}$$

ove: c varia comunque nei numeri reali

$A(t)$ è una primitiva (fissata) di $a(t)$

$G(t)$ è " " " di $f(t)\,e^{A(t)}$

Se voglio risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

basta imporre: $y(t_0) = \left(c + G(t_0)\right) e^{-A(t_0)} = y_0$, cioè

porre : $c = y_0 e^{A(t_0)} - G(t_0)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \Big(y_0 e^{A(t_0)} + \underbrace{G(t) - G(t_0)}_{\int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)}\,ds} \Big) e^{-A(t)}$$

scegliendo $A(t)$ in modo che $A(t_0) = 0$ (cioè $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$)

si perviene alla formula

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + \left(\int_{t_0}^{t} f(s) e^{A(s)}\,ds \right) e^{-A(t)}$$

in cui la soluzione particolare è vista come somma della soluzione dell'omogenea associata che passa per (t_0, y_0) e di una soluzione particolare passante per $(t_0, 0)$.

Es. $a(t) = a$ costante > 0 : $y'(t) + a\,y(t) = f(t)$

Sol. omog. associata : $y(t) = c\,e^{-at}$

Integrale generale : $y(t) = \left(c + \int f(t) e^{at} dt\right) e^{-at}$

Sol. del problema di Cauchy con $y(0) = y_0$:

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \left(\int_0^t f(s) e^{as}\,ds \right) e^{-at}$$

$$= y_0 e^{-at} + \boxed{\int_0^t e^{-a(t-s)} f(s)\,ds} \rightarrow \text{REGIME PERMANENTE}$$