10 minuti di TUTORATO

Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

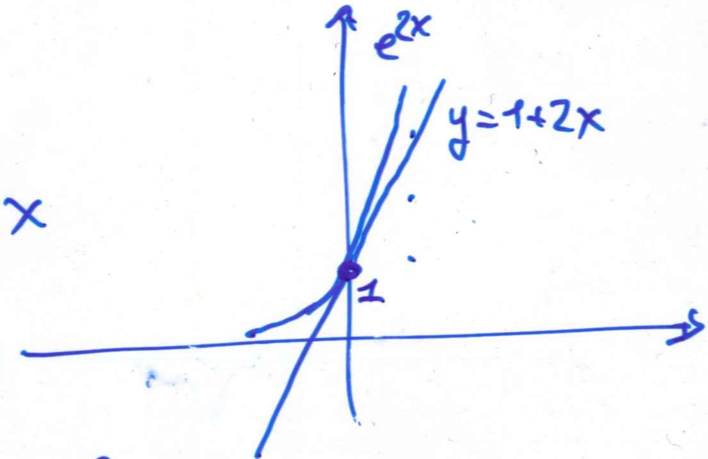
$$\boxed{e^{2x} \geq 1+2x}$$

1°) Tracciare un grafico ragionevole di e^{2x} in part. tracciando la retta tangente al grafico in $(0,1)$ (eq. ?)

$$(e^{2x})' = 2e^{2x} \qquad (e^{2x})'_{x=0} = 2$$

$$(e^{2x})_{x=0} = 1$$

$$y = 1+2x$$



2°) Se una funz. f è derivabile in $\mathbb{R}$ e è convessa in $\mathbb{R}$, $\forall\ (x_0, f(x_0))$ la tang. al grafico in $(x_0, f(x_0))$ giace al di sotto del grafico:

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$

3°) Visto che $f''(x) = (e^{2x})'' = 4e^{2x} > 0 \ \forall x$, e^{2x} è convessa e quindi $e^{2x} \geq 1+2x \quad \forall x$

ES. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \cot g\, x = 2\cos x \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: la variabile indip. può chiamarsi t ma anche x ecc.

1°) $\cot g\, x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ è definita e continua per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ in intervalli del tipo $(k\pi, (k+1)\pi)$

Poiché la condizione iniziale riguarda un $x = \pi/2$ che sta nell'intervallo $(0, \pi)$, le soluzioni vanno cercate in questo intervallo

2°) sol. dell'omogenea associata ($y' + y\cot g\, x = 0$): $y = 0$ e:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx \quad \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\operatorname{sen} x| + c,$$

cioè posto $C = e^c$: $|y| = \dfrac{C}{|\operatorname{sen} x|} \quad \Rightarrow y = \dfrac{k}{\operatorname{sen} x} \quad k \in \mathbb{R}$

3°) sol. particolare (per variazione della costante)

$$\bar{y}(x) = \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}'(x) = \frac{k'(x)\operatorname{sen} x - \cos x\, k(x)}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k'(x)}{\operatorname{sen} x} - \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x} \cot g\, x \right) + \frac{k(x)}{\operatorname{sen} x} \cot g\, x = 2\cos x$$

$$\Rightarrow k'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x \quad \Rightarrow \quad k(x) = \operatorname{sen}^2 x + c_1$$

e sostituendo:

$$\bar{y}(x) = \operatorname{sen} x + \frac{c_1}{\operatorname{sen} x}$$

4°) integrale generale : $y = \operatorname{sen} x + \dfrac{k_1}{\operatorname{sen} x}$

5°) $y(\pi/2) = 1 + k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -1$:

$$\boxed{y(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \text{con } x \in (0, \pi)}$$

Oppure con la formula generale:

$A(x) = \int \cot g\, x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c$: $A(\pi/2) = \ln 1 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

sol. del problema, tenuto conto che in $(0, \pi)$ si ha $\operatorname{sen} x > 0$:

$$y(x) = 0 \cdot e^{-\ln(\operatorname{sen} x)} + \left(\int_{\pi/2}^{x} 2\cos s\, e^{\ln(\operatorname{sen} s)}\, ds \right) e^{-\ln(\operatorname{sen} x)}$$

$$= 0 + \left(\int_{\pi/2}^{x} 2\operatorname{sen} s \cos s\, ds \right) \frac{1}{\operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen}^2 x - 1) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \text{come sopra.}$$

$$|y| = \frac{e^c}{|\operatorname{sen} x|}$$

$$|y \cdot \operatorname{sen} x| = e^c$$

$$y \cdot \operatorname{sen} x = \pm e^c$$

$$y = \frac{\pm e^c}{\operatorname{sen} x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pm e^c = C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y = 0 \quad \text{sol part.} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{C}{\operatorname{sen} x}$$

$C \in \mathbb{R}$

$y(x) = \frac{C}{\operatorname{sen} x}$ è la soluzione di

$$y'(x) = -y(x) \cdot \operatorname{cotg} x$$

relativamente all'intervallo $(0, \pi)$

Se $a(t) = a \in \mathbb{R}$ ci sono casi in cui si può evitare il metodo di variazione delle costanti:

$$y' + ay = \begin{cases} P(t) \text{ polinomio} \\ k\cos bt \quad \text{o} \quad k\sin bt \quad b \neq 0 \\ ke^{\lambda t} \quad \begin{cases} \lambda \neq -a & \text{Sol.part. } ce^{\lambda t} \\ \lambda = -a & \text{Sol.par } cte^{\lambda t} \end{cases} \\ ke^{\lambda t}\cos bt \quad \text{o} \quad ke^{\lambda t}\sin bt. \end{cases}$$

ESEMPI su cui spiegare come comportarsi in questi casi

1. $$y' + 2y = t^2 - 3t + 1$$

A) Sol. dell'omogenea $\quad z(t) = ce^{-2t}$

(controllo) $\quad z'(t) = -2ce^{-2t}$

B) cerco un polinomio di 2° grado (come $P(x)$)

$$\bar{y}(t) = at^2 + bt + c$$

che sia soluzione della eq. completa.

Calcolo

$$\bar{y}'(t) = 2at + b$$

Sostituisco nell'eq. diff.

$$(2at+b) + 2(at^2+bt+c) = t^2 - 3t + 1$$

$$2at^2 + (2a+2b)t + b + 2c = t^2 - 3t + 1$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = -3 \\ b + 2c = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} a = 1/2 & \\ 2b = -4 & b = -2 \\ 2c = 3 & c = 3/2 \end{array}$$

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ INT. GENERALE : $y(t) = ce^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{3}{2}$

(2)

$$y' - 5y = 2\cos 2t$$

Eq. omog. associata $z' - 5z = 0 \Rightarrow z(t) = ce^{5t}$

Cerco la soluzione particolare dell'eq. completa tra quelle della forma

$$\bar{y}(t) = a\cos 2t + b\,\text{sen}\,2t$$

Derivo:

$$\bar{y}'(t) = -2a\,\text{sen}\,2t + 2b\cos 2t$$

sostituisco

$$-2a\,\text{sen}\,2t + 2b\cos 2t - 5a\cos 2t - 5b\,\text{sen}\,2t = $$
$$= 2\cos 2t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

cioè

$$(-2a - 5b)\,\text{sen}\,2t + (2b - 5a - 2)\cos 2t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

in particolare per $t=0$ e $t=\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} 2b - 5a - 2 = 0 \\ -2a - 5b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a - 2b = -2 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{25}{2} - 2\right)b = -2 \\ a = -\frac{5}{2}b \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{4}{29} \\ a = -\frac{10}{29} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sol part. $\bar{y}(t) = \frac{-10}{29}\cos 2t + \frac{4}{29}\,\text{sen}\,2t$

(fare un controllo derivando e sostituendo nell'eq. diff.)

$\Rightarrow$ int. generale

$$y(t) = ce^{5t} - \frac{10}{29}\cos 2t + \frac{4}{29}\,\text{sen}\,2t$$

ANALOGAMENTE

(3) $y' + y = \operatorname{sen} t$

omog. assoc. ha sol. $z(t) = e^{-t}$

Cerco le sol particolari tra quelle della forma:

$$\bar{y}(t) = a \cos t + b \operatorname{sen} t$$

Derivo:

$$\bar{y}'(t) = -a \operatorname{sen} t + b \cos t$$

Sostituisco nell'eq. diff.:

$$(-a+b) \operatorname{sen} t + (a+b) \cos t = \operatorname{sen} t$$

$$\begin{cases} -a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1/2 \\ a=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1/2 \\ a=-1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{-t} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} \cos t.$$

---

(4)

$$y' - y = e^{2t}$$

omog. ass ha soluz.: $z(t) = c e^{t}$

Sol part. della completa: le cerco tra quelle della forma

$$\bar{y}(t) = k e^{2t}$$

$$\bar{y}'(t) = 2k e^{2t}$$

$$2k e^{2t} - k e^{2t} = e^{2t}$$

$$k e^{2t} = e^{2t} \qquad k=1$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = e^{2t}$$

Integr. generale $y(t) = e^{2t} + c e^{t}$.

5 MA:

$$y' + 2y = e^{-2t}$$

Sol. omog. assoc. $\quad z(t) = c e^{-2t}$

DEVO USARE IL

Metodo di variazione della costante (poiché $k e^{-2t}$ è sol. dell'omog. e quindi non può esserlo della completa)

$$\bar{y}(t) = c(t) e^{-2t}$$

$$\bar{y}'(t) = c'(t) e^{-2t} - 2c(t) e^{-2t}$$

$$\left(c'(t) - \cancel{2c(t)} + \cancel{2c(t)}\right)\cancel{e^{-2t}} = \cancel{e^{-2t}}^{\,1}$$

$$c'(t) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad c(t) = t \underbrace{+k}$$

lo dimentico poiché serve 1 sola sol. particolare

$$\bar{y}(t) = t e^{-2t}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = (t + c) e^{-2t}$$

è l'integrale generale

Cioè se l'eq. ha la forma

$$y' + ay = e^{-at}$$

cerco le soluzioni tra funzioni del tipo cte^{-at}

⑥

$$y' - y = e^{-t} \operatorname{sen} t$$

Soluz omog. associata $y(t) = ce^{t}$

soluz part. della completa

$$\bar{y}(t) = k e^{-t}(a \operatorname{sen} t + b \cos t) \qquad k = 1$$

$$\bar{y}'(t) = k\left(-e^{-t}(a \operatorname{sen} t + b \cos t) + e^{-t}(a \cos t - b \operatorname{sen} t)\right)$$

$$k \cancel{e^{-t}} \begin{pmatrix} -a \operatorname{sen} t - b \cos t + \\ -b \operatorname{sen} t + a \cos t + \\ -a \operatorname{sen} t - b \cos t \end{pmatrix} = \cancel{e^{-t}} \operatorname{sen} t$$

$$k\left(-\operatorname{sen} t\,(2a+b) + \cos t\,(a-2b)\right) = \operatorname{sen} t \quad \cancel{\forall t}$$

$$\begin{cases} k(a-2b) = 0 \\ -k(2a+b) = 1 \end{cases} \qquad k \neq 0 \qquad \begin{cases} a = 2b \\ 4b + b = -\frac{1}{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{-2}{5k} \\ b = \frac{-1}{5k} \end{cases} \qquad k = 1 \qquad a = -\frac{2}{5} \qquad b = -\frac{1}{5}$$

Int. gen. $y(t) = ce^{t} + e^{-t}\left(-\frac{2}{5} \operatorname{sen} t - \frac{1}{5} \cos t\right)$

$$y' - 3y = t - e^t \qquad (*)$$

Sol. omog. associata: $z(t) = ce^{3t}$

Sol. part. della completa?

① $y' - 3y = t \implies \bar{y}_1$ sol. part.

② $y' - 3y = -e^t \implies \bar{y}_2$ " "

È vero che $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ è soluz di $(*)$?

$$(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)' = \bar{y}_1' + \bar{y}_2'$$

$$\bar{y}_1' + \bar{y}_2' - 3\bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 =$$

$$= (\bar{y}_1' - 3\bar{y}_1) + (\bar{y}_2' - 3\bar{y}_2) = \underline{\underline{t - e^t}}$$

Sì

① : $\left.\begin{array}{l} \bar{y}_1(t) = at + b \\ \bar{y}_1'(t) = a \end{array}\right| \implies a - 3at - 3b \equiv t \ \forall t$

$$\begin{cases} 3a - 1 = 0 \\ a - 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = 1/9 \end{array}$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3} t + \frac{1}{9}$$

② $\left.\begin{array}{l} \bar{y}_2 = ke^t \\ \bar{y}_2' = ke^t \end{array}\right| \implies ke^t - 3ke^t = -e^t$

$$\implies k = 1/2$$

$$\bar{y}_2(t) = \frac{1}{2} e^t$$

$\implies$ INT. GEN: $y(t) = z(t) + y_1(t) + y_2(t) = ce^{3t} + \frac{1}{3} t + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} e^t.$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

Hanno la forma $F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0$.

ogni funzione $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in I e tale che

$$\forall t \in I: \ F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) = 0$$

si dice soluzione dell' eq. diff. di 2° ordine.

Si prova che l' integrale generale di un' eq. diff. del 2° ordine è costituito da una FAMIGLIA di funzioni dipendente da 2 parametri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Questo è il motivo per cui per risolvere il problema di Cauchy dovremo dare 2 condizioni iniziali (VEDI il caso dell' eq. che coinvolge l'accelerazione in cui si danno spostamento e velocità iniziali).

In particolare si dicono EQ. DIFF. LINEARI del 2° ORDINE quelle della forma

(1) $$y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = f(t)$$

con $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ continue su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.
Anche in questo caso, l' integrale generale dell' equazione diff. completa si ottiene sommando una soluzione particolare di (1) all' integrale generale dell' eq. diff. L. OMOGENEA ASSOCIATA

(2) $$y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = 0$$

Non ci sono però formule generali "belle" come nel caso del 1° ordine.

Fatti:

1) se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ sono solut. dell'equazione omog. anche $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lo è

2) se queste due soluzioni sono tali che $\boxed{\forall t \in I}$

WRONSKIANO $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

allora le soluzioni dell'EQ. OMOGENEA sono (tutte e) sole quelle del tipo $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso particolare: $a(t) = a$ $b(t) = b$ COSTANTI

L'equazione
$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$$
ha qualche soluzione della forma e^{rt} (come succede nel caso delle lineari di 1° ordine)?

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= e^{rt} \\ y'(t) &= r e^{rt} \\ y''(t) &= r^2 e^{rt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

la $y(t)$ è soluzione se e solo se $(r^2 + ar + b) e^{rt} = 0$ cioè se e solo se

$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$: equazione caratteristica dell'eq. differenziale

- Se $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ci sono due radici reali distinte r_1, r_2

$z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ sono tali che $\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} \neq 0$

comunque si sceglie t $\Rightarrow$ le soluzioni sono tutte e sole del tipo $c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Ad es. $y''(t) - k^2 y(t) = 0$ con $k \neq 0$ ha associata l'equazione $r^2 - k^2 = 0$ che ha le radici $r = \pm k$. Allora l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è

$$c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$$

$y'' - 4y' + 3y = 0$ diff. lineare del 2° ordine omog a coeff cost

Eq. caratteristica $r^2 - 4r + 3 = 0$

$r = 1, 3$

Sol omogenea $y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t}$