10 minuti di Tutoraggio

$$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx =$$

I.D. $x \geq 0$: $[0,+\infty)$

le primitive ci saranno in $[0,+\infty)$ poiché su questo intervallo l'integranda è continua in quanto rapporto di somme di funz. continue, con denom. sempre $\neq 0$.

$\sqrt{x} = x^{1/2}$ $\quad\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$

provo a sostituire $\quad x^{1/4} = t$

$$x = t^4$$
$$dx = 4t^3\,dt$$

$$= \int \frac{t^2-t}{1+t}\cdot 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^5-t^4}{1+t}\,dt$$

devo integrare una razionale fratta.

visto che il grado del num. è > di quello del denom. divido NUM. per DEN.

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
\text{gradi} & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & & -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2
\end{array}$$

$$\frac{t^5-t^4}{1+t} = \frac{(1+t)(t^4-2t^3+2t^2-2t+2)-2}{1+t}$$

$$= 4\int \left[(t^4-2t^3+2t^2-2t+2) - \frac{2}{1+t}\right]dt =$$

$$= 4\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 2t - 2\ln|1+t|\right] + c =$$ ($t = \sqrt[4]{x}$ è ≥ 0)

$$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - 2x + \frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x} - 2\ln(1+\sqrt[4]{x}) + c$$

Fatti:

1) se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ sono solut. dell'equazione omog. anche $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lo è

2) se queste due soluzioni sono tali che $\boxed{\forall t \in I}$

WRONSKIANO $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

allora le soluzioni dell'EQ. OMOGENEA sono (tutte e) sole quelle del tipo $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso particolare : $a(t) = a$ $b(t) = b$ COSTANTI

L'equazione

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$$

ha qualche soluzione della forma e^{rt} (come succede nel caso delle lineari di 1° ordine)?

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= e^{rt} \\ y'(t) &= r e^{rt} \\ y''(t) &= r^2 e^{rt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

la $y(t)$ è soluzione se e solo se $(r^2 + ar + b) e^{rt} = 0$ cioè se e solo se

$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$: equazione caratteristica dell'eq. differenziale

- Se $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ci sono due radici reali distinte r_1, r_2

$z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ sono tali che $\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} \neq 0$

comunque si sceglie t $\Rightarrow$ le soluzioni sono tutte e sole del tipo $c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Ad es. $y''(t) - k^2 y(t) = 0$ con $k \gtrless 0$ ha associata l'equazione $r^2 - k^2 = 0$ che ha le radici $r = \pm k$. Allora l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è

$$c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$$

• Se $\Delta = a^2 - 4b < 0$ ci sono due radici complesse coniugate $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ .. Allora

$e^{r_1 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$; $e^{r_2 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$

sono due soluzioni complesse dell'equazione differ. omogenea .... Se le voglio reali basta prendere

$$\frac{1}{2}(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}) = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{e} \quad \frac{1}{2i}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

VERIFICA per la prima soluzione:

se $z(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$

$z'(t) = e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t)$

$z''(t) = e^{\alpha t}(\alpha^2\cos\beta t - \alpha\beta\operatorname{sen}\beta t - \alpha\beta\operatorname{sen}\beta t - \beta^2\cos\beta t)$

$$z''(t) + a z'(t) + b z(t) = e^{\alpha t}\Big(\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)}_{=0}\cos\beta t - \underbrace{(2\alpha\beta + a\beta)}_{=0}\operatorname{sen}\beta t\Big) = 0$$

infatti per ipotesi $(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b = 0$ → cercare Re e Im.

Anche qui $\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t) \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t} \neq 0 \ \forall t.$

Dunque l'integrale generale avrà la forma:

$$c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t.$$

Da notare che posso leggere $\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ e $\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ come coseno e seno di un angolo φ e posto $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ mi riconduco a

$$e^{\alpha t} A\cos(\beta t - \varphi) \qquad A, \varphi \text{ qualsiasi}$$

Ad. es. $y''(t) + k^2 y(t) = 0$ ha associata l'equazione $r^2 + k^2 = 0$ cioè $r = \pm ki$: dunque l'integrale generale ha la forma $c_1\cos kt + c_2\operatorname{sen} kt$ o anche

$$A\cos(kt - \varphi)$$

$r_1 = \alpha + i\beta$

$$e^{r_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} =$$
$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$$

$$z = \cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t = e^{i\beta t}$$

$r_2 = \alpha - i\beta$

$$e^{r_2 t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i(-\beta t)} = e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i \operatorname{sen}(-\beta t)) =$$
$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$$

esistono due sol. reali indipendenti che si possano scrivere come

$$\bar{C}_1 e^{r_1 t} + \bar{C}_2 e^{r_2 t}$$
$$\bar{\bar{C}}_1 e^{r_1 t} + \bar{\bar{C}}_2 e^{r_2 t} \quad ?$$

Provo: $$\frac{1}{2}e^{r_1 t} + \frac{1}{2}e^{r_2 t} = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\cancel{\operatorname{sen}\beta t} + \cos\beta t - i\cancel{\operatorname{sen}\beta t}) =$$
$$= e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right) = \frac{e^{\alpha t}}{2i}\left(\cancel{\cos\beta t} + i\operatorname{sen}\beta t - \cancel{\cos\beta t} + i\operatorname{sen}\beta t\right) =$$
$$= e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

Le due soluzioni $z_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$

$z_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$

Sono <u>indipendenti</u>. Infatti

$$z_1'(t) = \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$
$$z_2'(t) = \alpha e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ (\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t)e^{\alpha t} & e^{\alpha t}(\alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha t}\left(\cancel{\alpha\operatorname{sen}\beta t\cos\beta t} + \beta\cos^2\beta t - \cancel{\alpha\operatorname{sen}\beta t\cos\beta t} + \right.$$
$$\left. + \beta\operatorname{sen}^2\beta t\right) =$$

$$= \beta e^{2\alpha t}(\cos^2\beta t + \operatorname{sen}^2\beta t) = \beta e^{2\alpha t}$$

essendo $\beta \neq 0$, anche $\beta e^{2\alpha t} \neq 0$.

ESEMPIO CONCRETO

$$y'' + y = 0$$

eq. caratteristica $z^2 + 1 = 0$ $\quad r = \pm i$

$\operatorname{Re} r = 0 \quad \operatorname{Im} r = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

integrale generale

$$c_1 e^{0\cdot t}\cos t + c_2 e^{0\cdot t}\operatorname{sen} t =$$

$$= c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cdot\left(\underbrace{\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}}_{\cos\varphi}\cos t + \underbrace{\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}}_{\operatorname{sen}\varphi}\operatorname{sen} t\right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}_{\text{ampiezza}}\left(\cos(t-\varphi)\right) \qquad \boxed{\varphi = \text{sfasatura}}$$

- se $\Delta = a^2 - 4b = 0$ c'è un'unica radice (doppia) per $\boxed{z^2 + az + b = 0}$ $\rightarrow b = \frac{a^2}{4}$
  $z = -a/2$. Allora una soluzione è $e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}$.
  Per trovare un'altra sol. indipendente da questa:

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI.

Cerco $z(t) = c(t)\, e^{-a/2\, t}$ che sia soluzione:

$$z'(t) = \left(c'(t) - \frac{a}{2} c(t)\right) e^{-a/2\, t}$$

$$z''(t) = \left(c''(t) - \frac{a}{2} c'(t) - \frac{a}{2} c'(t) + \frac{a^2}{4} c(t)\right) e^{-a/2\, t}$$

e quindi sostituendo nell'eq. diff.:

$$\left(c''(t) - \cancel{a c'(t)} + \cancel{\frac{a^2}{4} c(t)} + \cancel{a c'(t)} - \cancel{\frac{a^2}{2} c(t)} + \cancel{\frac{a^2}{4} c(t)}\right) e^{-a/2\, t} = 0$$

cioè

$$c''(t) = 0$$
$$c'(t) = c_1$$
$$c(t) = c_1 t + c_2$$

Quindi una seconda soluzione indipendente (*) da $e^{-a/2\, t}$ è $t e^{-a/2\, t}$ e l'integrale generale è

$$(c_1 t + c_2)\, e^{-a/2\, t}$$

(*) (Verifico che anche le due soluzioni $t e^{-a/2\, t}$ e $e^{-a/2\, t}$ sono indipendenti: $\begin{vmatrix} t e^{-a/2\, t} & e^{-a/2\, t} \\ (1 - a/2\, t) e^{-a/2\, t} & -\frac{a}{2} e^{-a/2\, t} \end{vmatrix} = -e^{-at} \neq 0 \ \forall t$.)

Ricerca delle soluzioni particolari dell'equazione completa

Si può sempre cercare di usare il metodo di variazioni delle costanti. Ma quando $f(t)$ ha una forma che ricorda quella delle possibili soluzioni dell'omogenea:

polinomio ; $e^{\lambda t}$; $e^{\lambda t} \cos \omega t$ oppure $e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$

si può far di meglio.

- $f(t)$ polinomio di grado n

1) se in $y''+ay'+by=f(t)$ e $\boxed{b\neq 0}$ si cerca polinomio di grado n

2) " e $\boxed{b=0\ ,\ a\neq 0}$ si cerca polinomio di grado $n+1$

3) " e $\boxed{b=0=a}$ si cerca polinomio di grado $n+2$

- In realtà l'ultimo caso è banale: $y''=f(t)$: si procede a una doppia integrazione
- Nel caso precedente $y''+ay'=f(t)$ si potrebbe porre $z(t)=y'(t)$ e pensare a quella data come ad un'eq. lineare del 1° ord. in $z(t)$ e poi integrare il risultato.

- Vediamo un esempio significativo:

$$y''-k^2y=1+t^2 \quad , k\neq 0$$

cerco una sol. particolare del tipo $\bar{y}(t)=c_0+c_1t+c_2t^2$

$(\Rightarrow \bar{y}'(t)=c_1+2c_2t \Rightarrow \bar{y}''(t)=2c_2)$: $2c_2-k^2(c_0+c_1t+c_2t^2)\equiv 1+t^2$

$\Rightarrow \boxed{2c_2-k^2c_0-1}-k^2c_1t-\boxed{t^2(k^2c_2+1)}\equiv 0 \Rightarrow$ $c_1=0$, $c_2=-1/k^2$, $c_0=\frac{-2/k^2-1}{k^2}=\frac{-(2+k^2)}{k^4}$

cioè una sol. particolare è

$$\frac{-(2+k^2)}{k^4}-\frac{1}{k^2}t^2$$

Soluzione generale: $-\frac{2+k^2}{k^4}-\frac{1}{k^2}t^2+c_1e^{kt}+c_2e^{-kt}$

- Esempio meno significativo: $y''+2y'=\boxed{4t}$ ← grado 1

cerco sol. particolare del tipo $\bar{y}(t)=c_0+c_1t+c_2t^2$ ← grado 2

cioè sostituendo $2c_2+2c_1+4c_2t=4t$ $\Rightarrow c_2=1$ $c_1=-c_2=-1$ c_0 arbitrario

Sol. part. $\bar{y}(t)=-t+t^2$ — Sol. omog.: $r^2+2r=0 \Rightarrow z(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^0$

Sol. generale $y(t)=-t+t^2+c_1e^{-2t}+c_2e^0$

Se invece pongo $z(t)=y'(t)$ e risolvo $z'+2z=4t$ trovo:

1) la sol. part. $\bar{z}(t)=at+b$ è tale che $a+2at+2b=4t \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{a}{2}=-1 \end{cases}$
2) l'integr. generale di $z'+2z=4t$ è $z(t)=2t-1+k_1e^{-2t}$
3) l'integr. generale di $y'(t)=2t-1+k_1e^{-2t}$ è $y(t)=t^2-t-\frac{k_1}{2}e^{-2t}+c_2$, uguale alla precedente, posto $c_1=-k_1/2$.

- $f(t) = Ae^{\lambda t}$

Cerco le sol. tra quelle della forma:

$$\bar{y}(t) = c(t)\, e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \bar{y}'(t) = \left(c'(t) + \lambda c(t)\right) e^{\lambda t} \Rightarrow \bar{y}''(t) = \left(c''(t) + 2\lambda c'(t) + \lambda^2 c(t)\right) e^{\lambda t}$$

Sostituisco nell'eq. diff.

$$\left[(c'' + 2\lambda c' + \lambda^2 c) + a(c' + \lambda c) + bc\right] \cancel{e^{\lambda t}} = A \cancel{e^{\lambda t}}$$

ove c, c', c'' sono funzioni incognite dipendenti da t

Si arriva così all'eq. diff. lin. del II ordine a coeff. cost. con termine noto "polinomiale":

$$c'' + (2\lambda + a) c' + (\lambda^2 + a\lambda + b) c = A$$

1) Se $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$

cioè λ NON È sol. dell'eq. caratteristica dell'omog. associata prendo

$$c(t) = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$$

$\Rightarrow c'(t) = 0,\ c''(t) = 0 \Rightarrow$ sostituendo si ha una identità.

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b} \cdot e^{\lambda t}$$

cioè λ non è uno zero della derivata del polin. caratteristico $z^2 + az + b$

2) Se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ma $2\lambda + a \neq 0$ prendo

$$c'(t) = \frac{A}{2\lambda + a}$$

$\Rightarrow c''(t) = 0 \Rightarrow$ sostituendo in $c'' + (2\lambda + a)c' = A$ si ha identità.

$$\Rightarrow c(t) = \frac{At}{2\lambda + a} + (\underset{\shortparallel\atop 0}{k_1}) \Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{At}{2\lambda + a} \cdot e^{\lambda t}$$

3) Se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a = 0$:

$$c'' = A \Rightarrow c' = At\ (+\underset{\shortparallel\atop 0}{k_1}) \Rightarrow c = \frac{A}{2} t^2\ (+\underset{\shortparallel\atop 0}{k_1} t + \underset{\shortparallel\atop 0}{k_2})$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \frac{A}{2} t^2 e^{\lambda t}$$

ATTENZIONE:

non è importante ricordare i coefficienti che entrano in gioco nelle 3 soluzioni, bensì che ci sono 3 casi e che in dipendenza da essi si devono scegliere le sol. particolari.

OPERATIVAMENTE

data la $y'' + a y' + by = A e^{\lambda t}$

1°) risolvere l'omogenea associata e in particolare l'equazione caratteristica:

(*) $r^2 + a r + b = 0$

2°) controllare se λ è soluzione dell'eq. (*)

- SE LA RISPOSTA È NO la sol. part. ha la forma

$$\bar{y}(t) = k e^{\lambda t}$$

- SE LA RISPOSTA È SÌ, controllare se λ è soluzione di

$$(r^2 + ar + b)' = 0 \quad \text{cioè di } 2r + a = 0$$

  – SE LA RISPOSTA È NO la sol. part. ha la forma

$$\bar{y}(t) = k t e^{\lambda t}$$

  – SE LA RISPOSTA È SÌ la sol part. ha la forma

$$\bar{y}(t) = k t^2 e^{\lambda t}$$

3°) in base alle risposte ottenute – e alle corrispondenti forme di sol. part. $\bar{y}(t)$ trovate – sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. e trovare il valore di k.

Se si sceglie una forma sbagliata per difetto di potenza ($kt^i e^{\lambda t}$ invece di $kt^j e^{\lambda t}$ con $j > i$) l'equazione che proviene da (3°) non ha soluzione; se è sbagliata per eccesso di potenza, la stessa equazione non è un'identità in t.

Esempi

$$y'' - 3y' - 4y = e^{3t} \quad (*)$$

1°) cercare la soluz. della omog. associata:

$z'' - 3z' - 4z = 0$

eq. caratteristica $r^2 - 3r - 4 = 0$ $\quad r = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$

sol. gen. della omogenea:

$$z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$$

2°) Ricerca della sol. particolare. Il coeff. 3 all'esponente del termine noto NON È SOL. dell'eq. caratteristica $\Rightarrow$ la sol. è

3°) della forma $\bar{y}(t) = k e^{3t}$ con $k \in \mathbb{R}$

$\bar{y}'(t) = 3k e^{3t}$, $\bar{y}''(t) = 9k e^{3t}$

Sostituisco nella $(*)$

$$9k \cancel{e^{3t}} - 3 \cdot 3\cancel{k} e^{3t} - 4 \cdot k e^{3t} = e^{3t}$$

$$-4k = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{1}{4}$$

Sol part: $\bar{y}(t) = -\frac{1}{4} e^{3t}$

4°) Sommo:

$$y(t) = -\frac{1}{4} e^{3t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$$

è l'int. gen di $(*)$

A) $y'' - 5y' = e^{5t}$ B) $y'' - 5y' = e^{-t}$

1°) omog. ass. : $z'' - 5z' = 0$
eq. caratt : : $r^2 - 5r = 0$ $\begin{cases} r=0 \\ r=5 \end{cases}$

Int. gen. della omogenea:

$$z(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{5t} =$$
$$= c_1 + c_2 e^{5t}$$

2°) Ricerca della ~~sol. part.~~ nel caso (A): $f(t) = e^{5t}$.
Il coeff. 5 all'esponente è soluzione dell'equazione caratteristica. Cerco le soluzioni tra quelle della forma

3°)
$$\bar{y}(t) = k t e^{5t}$$

Derivate successive

$$\bar{y}'(t) = k(1+5t)e^{5t}$$
$$\bar{y}''(t) = k(5+5+25t)e^{5t}$$

sostituisco nell'eq. diff.

$$k(10 + \cancel{25t} - 5 - \cancel{25t})\cancel{e^{5t}} = \cancel{e^{5t}} \quad \Rightarrow 5k = 1$$

4°) Integr. generale: $y(t) = \frac{1}{5} t e^{5t} + c_1 + c_2 e^{5t}$.

(B) Se invece $f(t) = e^{-t}$, la strategia è la stessa vista in precedenza: $\bar{y}(t) = ke^{-t} \Rightarrow \bar{y}'(t) = -ke^{-t} \Rightarrow$ $\bar{y}''(t) = ke^{-t}$. Sostituisco:

$$ke^{-t} - 5(-ke^{-t}) = e^{-t} \Rightarrow 6ke^{-t} = e^{-t} \Rightarrow k = 1/6$$

E quindi l'integr. generale è $y(t) = \frac{1}{6} e^{-t} + c_1 + c_2 e^{5t}$.

• $f(t) = A e^{\lambda t} \cos\omega t$ e $\omega \neq 0$
(oppure $A e^{\lambda t} \operatorname{sen}\omega t$)

esiste una soluzione del tipo

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} ?$$

Calcolando $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ e sostituendo si arriva a un sistema di questo tipo

$$\begin{cases} (\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)c_1 + (2\lambda\omega + a\omega)c_2 = A \\ -(2\lambda\omega + a\omega)c_1 + (\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)c_2 = 0 \end{cases}$$

se $(\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)^2 \neq -(2\lambda\omega + a\omega)^2$ esiste una e una sola coppia soluzione $(c_1, c_2) \Rightarrow$ il problema è risolto.

Se $(\lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b)^2 + (2\lambda\omega + a\omega)^2 = 0$

allora $\begin{cases} \lambda^2 - \omega^2 + a\lambda + b = 0 \\ \omega(2\lambda + a) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\omega \neq 0]{} \begin{cases} \omega^2 = \lambda^2 + a\lambda + b \\ 2\lambda + a = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -a/2 \\ \omega^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{-a^2}{2} + b = \dfrac{4b - a^2}{4} = -\dfrac{\Delta}{4} \end{cases}$$

Ricordare: Δ è il discriminante di $z^2 + az + b = 0$

In questo caso non bastano i coeff. costanti

Ma si prova che una soluz. particolare ha la forma

$$\boxed{\bar{y}(t) = k \cdot t \cdot e^{\lambda t} \operatorname{sen}\omega t} \qquad k = \frac{A}{2\omega}$$

se $f(t)= Ae^{\lambda t}\,\text{sen}\,\omega t$, $(\omega\neq 0)$

Sostituendo nell'eq. diff.

$\bar{y}(t)= e^{\lambda t}(c_1\cos\omega t + c_2\,\text{sen}\,\omega t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

e le sue derivate si perviene a un sistema che differisce dal precedente solo per lo scambio dei termini noti (0 e A). Ancora la soluzione esiste ed è unica, a meno che $\begin{cases}\lambda=-a/2\\ \Delta=-4\omega^2\end{cases}$

In questo caso la soluz. da scegliere è

$$\bar{y}(t)= k t e^{\lambda t}\cos\omega t \qquad \text{con } k=\frac{-A}{2\omega}.$$

$\boxed{\text{Operativamente}}$

Data $\quad y''+ay'+by = Ae^{\lambda t}\cos\omega t \qquad (\omega\neq 0)$

1°) risolvere l'omog. associata e in particolare l'equaz. caratter. $r^2+ar+b=0$.

2°) guardare il discriminante di tale equazione:

$$\Delta = a^2-4b$$

- Se $\Delta\geq 0$ la sol. part. dell'eq. diff. ha la forma:

$$\bar{y}(t)= e^{\lambda t}(c_1\cos\omega t + c_2\,\text{sen}\,\omega t)$$

Sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. per ricavare c_1 e c_2 via sistema lineare di 2 eq. in c_1, c_2.

- Se $\Delta<0$ valutare la derivata di r^2+ar+b in $r=\lambda$:

  - se $2\lambda+a\neq 0$ la sol. part. è quella già segnalata al caso precedente
  - se $2\lambda+a=0$ la sol. part. dell'eq. diff. ha la forma

$$\bar{y}(t)= k t e^{\lambda t}\,\text{sen}\,\omega t$$

Sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. per trovare k.

Vale schema analogo per $y''+ay'+by= Ae^{\lambda t}\,\text{sen}\,\omega t$.

per esercizio risolvere:

$$y'' + y = \cos\frac{t}{4}$$

Svolgimento:

1) l'omogenea associata $z'' + z = 0$ ha eq. caratteristica $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ Soluzioni:

$$z(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$$

2) in questo caso

$\lambda = 0$ (poichè il coeff. di $\cos\frac{t}{4}$ è $1 = e^{0\cdot t}$)

$a = 0$ (e quindi $\lambda = -\frac{a}{2}$)

ma $\omega^2 = \frac{1}{16} \neq -\frac{\Delta}{4} = -\left(-\frac{1}{4}\right)$

Quindi si può trovare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = c_1 \cos\frac{t}{4} + c_2 \operatorname{sen}\frac{t}{4}$$

Derivate successive:

$$\bar{y}'(t) = -\frac{1}{4} c_1 \operatorname{sen}\frac{t}{4} + \frac{1}{4} c_2 \cos\frac{t}{4}$$

$$\bar{y}''(t) = -\frac{1}{16} c_1 \cos\frac{t}{4} - \frac{1}{16} c_2 \operatorname{sen}\frac{t}{4}$$

Sostituisco nell'eq. diff.:

$$-\frac{1}{16} c_1 \cos\frac{t}{4} - \frac{1}{16} c_2 \sin\frac{t}{4} + c_1 \cos\frac{t}{4} + c_2 \operatorname{sen}\frac{t}{4} = \cos\frac{t}{4}$$

$$\left(-\frac{1}{16} c_1 + c_1 - 1\right) \cos\frac{t}{4} + \left(-\frac{1}{16} c_2 + c_2\right) \sin\frac{t}{4} \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{16} c_1 = 1 \\ \frac{15}{16} c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = \frac{16}{15} \quad c_2 = 0$$

3) Integrale generale $y(t) = \frac{16}{15} \cos\frac{t}{4} + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$