$$\int \frac{x+1}{x^2-x+5}\,dx = \qquad (x^2-x+5)' = 2x-1$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+2+1}{x^2-x+5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x-1}{x^2-x+5}\,dx + \int \frac{3}{x^2-x+5}\,dx\right]$$

$$\int \frac{f'}{f}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2-x+5) + 3\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{19}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2-x+5) + \frac{3}{\frac{19}{4}}\int \frac{dx}{\frac{4}{19}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2-x+5) + \frac{12}{19}\int \frac{\sqrt{19}}{2}\,\frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$\boxed{t = \frac{2}{\sqrt{19}}(x-1) \quad dx = \frac{\sqrt{19}}{2}\,dt}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2-x+5) + \frac{6}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{19}}(x-1)\right) + c$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{(x+1)^3}{2x-3}\right)$$

$$\text{I D} \quad \frac{(x+1)^3}{2x-3} > 0 \iff \frac{x+1}{2x-3} > 0 \iff (-\infty,-1) \cup \left(\frac{3}{2},+\infty\right)$$

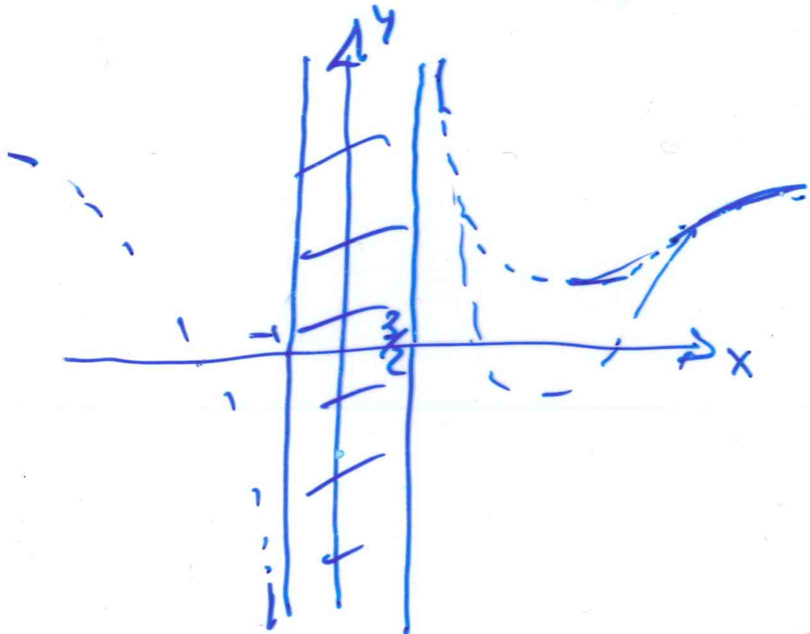
$$\lim_{x\to-\infty} \ln\frac{(x+1)^3}{2x-3} = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{2\cancel{x}}\right) = +\infty$$

asint. obliquo? No perché va a $+\infty$ come $2\ln|x|$

$$\lim_{x\to-1^-} \ln\frac{(x+1)^3}{2x-3} = -\infty \qquad \text{asint. vert. } x=-1$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} \ln\frac{(x+1)^3}{2x-3} = \ln\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x^3}{2x} = +\infty$$



Dai limiti si può inferire che l'andamento è all'incirca questo.
Il problema è se il valore assunto nel minimo relativo è >0 o <0

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{(x+1)^{\cancel{3}}}{\cancel{2x-3}}} \cdot \frac{3\cancel{(x+1)^2}(2x-3) - 2(x+1)^{\cancel{3}}}{(2x-3)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{6x-9-2x-2}{(x+1)(2x-3)} = \frac{4x-11}{(x+1)(2x-3)}$$

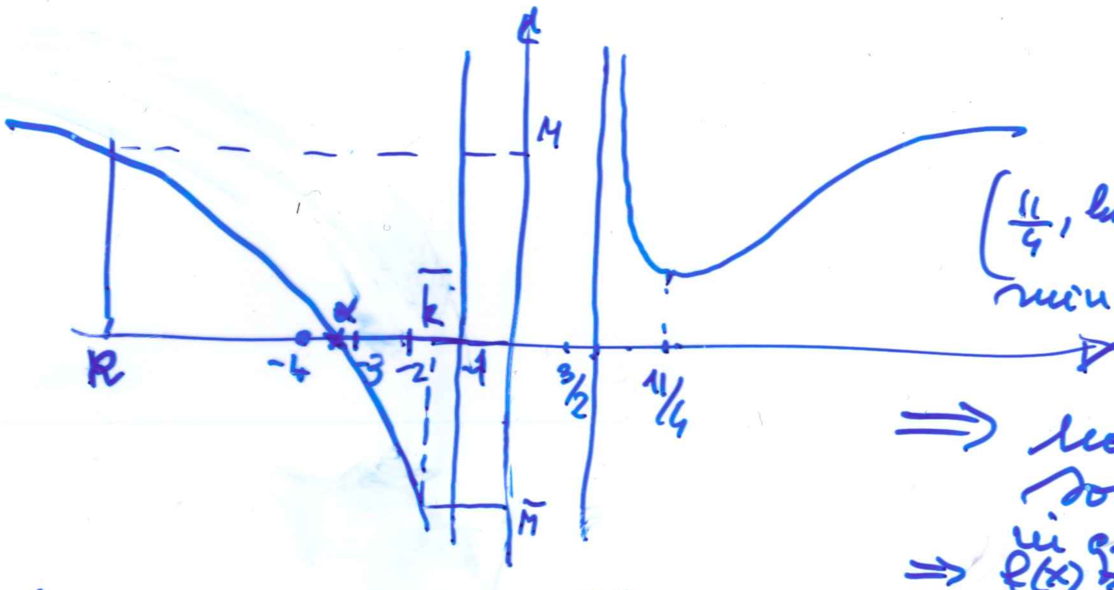
Il den. nell'I.D. $(-\infty,-1)\cup(3/2,+\infty)$
è >0

$f'(x)\geq 0 \iff \begin{cases} x\in \text{I.D.} \\ 4x-11\geq 0 \end{cases}$ $\quad x\geq \frac{11}{4}$

$f(x)$ è crescente per $x\in(\frac{11}{4},+\infty)$
decresc. se $x\in(-\infty,-1)$ oppure
$x\in(-1,\frac{11}{4})$

ha min. rel in $x=\frac{11}{4}$

$$f\left(\frac{11}{4}\right) = \ln\frac{\left(\frac{15}{4}\right)^3}{5} = \ln\frac{225\cdot 3}{64} > 0$$



$\left(\frac{11}{4}, \ln\frac{675}{64}\right)$ è un min. assoluto in $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
$\Longrightarrow$ non ci sono zeri in questo intervallo
$\Rightarrow f(x)>0$

so che per $x\to-\infty$ $\quad f(x)\to+\infty$ per def di limite
$\forall M: \exists\, k\in\mathbb{R}$ t.c. se $x<k$ $f(x)>M>0$
mentre per $x\to-1$ $\quad f(x)\to-\infty$
$\forall \bar{M}<0\ \exists\, \bar{k}<-1$ t.c. se $\bar{k}<x<-1$ $f(x)<\bar{M}$

la funz è continua
vale il teor. degli zeri: sicuramente
$\exists$ uno zero in $[k,\bar{k}]$; è l'unico poiché in questo intervallo la funzione è mon.

x	$\ln\left(\frac{(x+1)^3}{2x-3}\right)$
-2	$\ln \frac{-1}{-7} = -\ln 7$
-3	$\ln\left(\frac{-8}{-9}\right) = \ln \frac{8}{9} < 0$
-4	$\ln\left(\frac{27}{9}\right) = \ln 3 > 1$

$\Rightarrow$ lo zero è in $(-4,-3)$

La funz è invertibile

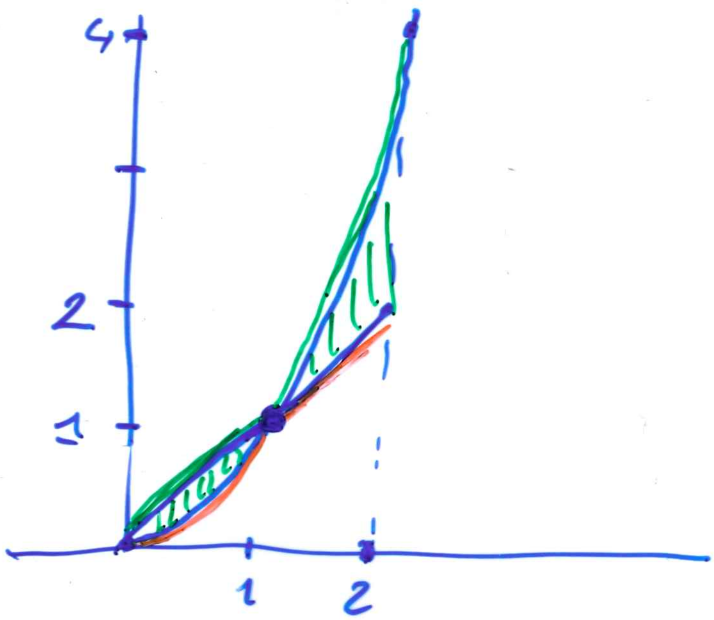
in $(-\infty,-1)$: monot. decr.!

in $(3/2, 11/4)$: "

in $(11/4, +\infty)$: "

Area della regione limitata del piano xOy così descritta:

$$\left\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ \underbrace{\min(x,x^2)}_{f(x)}\le y\le \underbrace{\max(x,x^2)}_{g(x)}\right\}$$



$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } 0\le x\le 1 \\ x & \text{se } 1< x\le 2\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{se } 0\le x\le 1 \\ x^2 & \text{se } 1< x\le 2\end{cases}$$

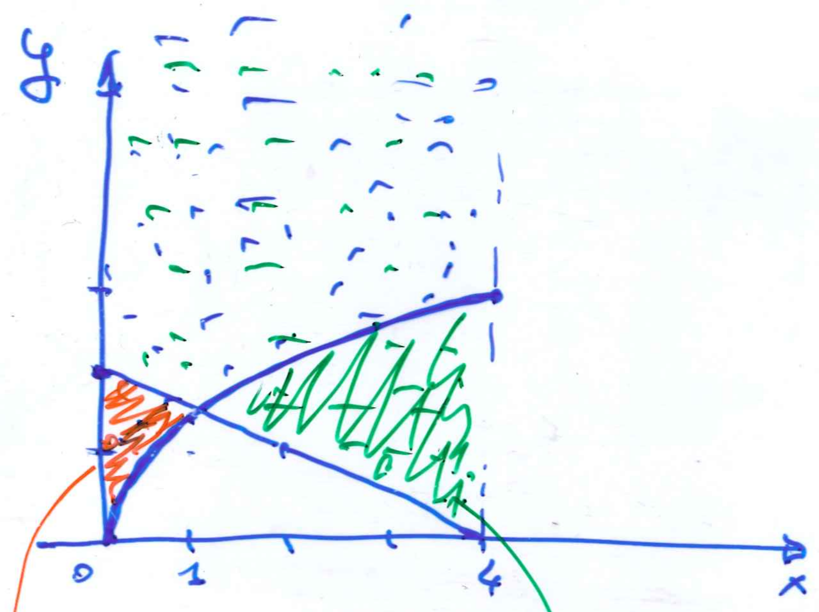
$$\text{Area}=\int_0^1 (x-x^2)\,dx+\int_1^2 (x^2-x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{6}{3}+1-2=1$$

$$\{(x,y) : 0 \le x \le 4,\ (2y+x-4)\cdot(2y-3\sqrt{x}) \le 0\}$$



$2y+x-4 \geq 0$

$2y-3\sqrt{x} \gtrless 0$

$y \geq \frac{3}{2}\sqrt{x} = f(x)$

$y \geq 2-\frac{1}{2}x = g(x)$

$y \geq \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$y \leq 2-\frac{1}{2}x$

$y \leq \frac{3}{2}x$

$y \geq 2-\frac{1}{2}x$

$$\text{Area} = \int_0^{x_0} (g(x)-f(x))\,dx + \int_{x_0}^{4} (f(x)-g(x))\,dx$$

$x_0 ? \iff \frac{3}{2}\sqrt{x} \stackrel{?}{=} 2-\frac{1}{2}x$

$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2 = 0$

$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0 \qquad \sqrt{x} = t$

$t^2 + 3t - 4 = 0 \quad t=1,\ t=-4 \implies x_0 = 1$

$$Q = \left[2x - \frac{1}{4}x^2 - x^{3/2}\right]_0^1 + \left[-2x + \frac{1}{4}x^2 + x^{3/2}\right]_1^4 =$$

$$= 2 - \frac{1}{4} - \cancel{1} - \cancel{8} + 4 + \cancel{8} + \cancel{2} - \frac{1}{4} - \cancel{1} = \frac{11}{2}$$

Per quale $\alpha > 0$ converge

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha}\, dx \ ?$$

Converge per $\alpha > 1$ (diverge altrimenti)

E' int. di 1^a specie, di una funz >0 su $[2,+\infty)$

$$\lim_{z \to +\infty} \int_2^z \frac{dx}{(x-1)^\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \alpha = 1 : \lim_{z\to+\infty} \left[\ln|x-1|\right]_2^z = \lim_{z\to+\infty} \ln(z-1) = +\infty \\ \alpha \neq 1 \quad \lim_{z\to+\infty} \left[\frac{(x-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^z = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{z^{\alpha-1}} - \frac{1}{1}\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0<\alpha<1 \quad \alpha-1<0 : +\infty \\ \alpha > 1 \quad \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\cdot(-1) = \frac{1}{\alpha-1} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{1+4t^2}$$

a) dove è def. e cont? in $\mathbb{R}$. $f(t) > 0 \ : \forall t \in \mathbb{R}$

b) $g(x) \sim f(x)$ negli estremi dell' I.D.
$g(x)$ + semplice di $f(x)$

$$g(t) = \frac{1}{4t^2} \sim f(t) \quad \text{per } |t| > 10$$

c) Stabilire se converge $\int_{-1/2}^{+\infty} f(t)\, dt$

Posso applicare i criteri di convergenza

$$\int_{-1/2}^{+\infty} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-1/2}^{10} f(t)\,dt}_{\text{numero}} + \underbrace{\int_{10}^{+\infty} f(t)\,dt}_{\text{converge.}} \quad \text{conv.}$$

$$f(t) \sim \frac{1}{4t^2} \qquad \frac{1}{4}\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ per il criterio del cfr. asintotico converge anche $\int_{10}^{+\infty} f(t)\,dt$

$$\int_{-1/2}^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{x} \frac{2}{1+4t^2}\,dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\arctan 2t\right]_{-1/2}^{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\arctan 2x - \arctan(-1)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\arctan 2x + \frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

$$f(x) = 2^{\sqrt{4-x}} \cdot \arctan(x^2 - x - 1)$$

Calc. tang. nel punto di ascissa $x=0$ del grafico.

$$f(0) = 2^{\sqrt{4}} \cdot \arctan(-1) = 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi$$

$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^{\sqrt{4-x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} \arctan(x^2-x-1) +$$

$$+ 2^{\sqrt{4-x}} \cdot \frac{2x - 1}{1+(x^2-x-1)^2}$$

$$f'(0) = \ln 2 \cdot \cancel{2^2} \cdot \frac{-1}{2 \cdot \cancel{2}} \arctan(-1) + 2^2 \cdot \frac{-1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \ln 2 - 2$$

$$y = -\pi + \left(\frac{\pi}{4} \ln 2 - 2\right)(x - 0)$$

Calcolare:

$$\int \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,dt = \boxed{\begin{array}{c} \text{per sost.} \\ \sqrt{1+t} = s \\ 1+t = s^2 \\ t = s^2-1 \\ dt = 2s\,ds \end{array}} \int \frac{2\cancel{s}\,ds}{(s^2-1)\cancel{s}} = 2\int \frac{ds}{s^2-1}$$

$$= \int \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) ds =$$

$$= \ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}\right|$$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} = \frac{(A+B)s + A - B}{s^2-1}$$

$A = 1/2$

$B = -1/2$

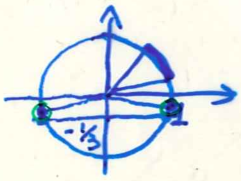
Calcolare

$$\int (\tan x)^3 \underbrace{\left((\tan x)^2+1\right)}_{(\tan x)'} dx = \frac{(\tan x)^4}{4} + c$$

Calcolare

$$\int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{1+3\,\mathrm{sen}\,2x}\,dx$$

1°) nell'intervallo $[\pi/12, \pi/4]$ la funzione è continua? (altrimenti non posso calcolare l'int. definito)
Se è definita, essendo rapporto di funz. continue, è continua.
Deve essere $1+3\,\mathrm{sen}\,2x \neq 0$ cioè $\mathrm{sen}\,2x \neq -\frac{1}{3}$



Sono esclusi gli archi che a partire dal semiasse delle x positive comprendono i punti evidenziati in verde.
L'arco che consideriamo è l'arco in grassetto ⇒ o.k.

2°) Calcolo l'int. indefinito per sostituzione $\begin{cases} \mathrm{sen}\,2x = t \\ 2\cos 2x\,dx = dt \end{cases}$

$$\int \frac{\cos 2x}{1+3\,\mathrm{sen}\,2x}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{3\,dt}{1+3t} = \frac{1}{6}\ln|1+3t| + c =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|1+3\,\mathrm{sen}\,2x| + c$$

3°) $$\int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{1+3\,\mathrm{sen}\,2x}\,dx = \left[\frac{1}{6}\ln|1+3\,\mathrm{sen}\,2x|\right]_{\pi/12}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln|1+3| - \ln\left|1+\frac{3}{2}\right|\right) = \frac{1}{6}\ln\frac{8}{5}$$