RIEPILOGO

Eq. diff. del 2° ordine lineari a coeff costanti

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = f(t)$$

$f(t)$ continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

a, b costanti

Per risolverla devo sommare una sol. particolare dell'equazione completa $(*)$ con le soluzioni dell'omogenea associata:

$$z'' + az' + bz = 0$$

$\downarrow$ associare l'eq. caratteristica

$$r^2 + ar + b = 0$$

3 CASI:

$\Delta > 0$: 2 sol. reali distinte r_1, r_2 e tutte le sol dell'omogenea hanno la forma

$$z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Delta < 0$: $r_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{C}$ con $\Delta = a^2 - 4b$

$$= \underbrace{-\frac{a}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\beta} \sqrt{-1} = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$$

$$z(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t)$$

$\Delta = 0$: 1 sola sol. reale : $r = -\frac{a}{2}$

$$z(t) = c_1 e^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{a}{2}t} =$$
$$= e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 + c_2 t)$$

Poi passo a esaminare le <u>soluzioni particolari</u> in dipendenza da $f(t)$

per trovare una sol. della completa la cerco tra funzioni "SIMILI" al termine noto

1) $f(t)$ polinomio di grado n

cerco la soluz. nei polinomi

- di grado n : $\bar{y}(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

  solo se $b \neq 0$

- di grado $n+1$: se $b=0$ e $a \neq 0$
- di grado $n+2$: se $b=0=a$

  in questi due casi l'eq. diff. ha forma

  $y'' + ay' = f(t)$ $\rightarrow$ sost. $x(t) = y'(t)$, $x'(t) = y''(t)$

  $y'' = f(t)$ $\rightarrow$ calcolo successivamente due primitive

2) $f(t) = A e^{\lambda t} \cos \omega t$ oppure $f(t) = A e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$

$\boxed{\omega = 0}$: $A e^{\lambda t}$

$\boxed{\lambda = 0}$: $A \cos \omega t$

$\boxed{\lambda = 0}$: $A \operatorname{sen} \omega t$

Vedi pagine successive

3) $f(t)$ = somma di 2 o più dei casi precedenti

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Cerco una soluzione particolare per le eq. diff. :

$y'' + ay' + by = f_1(t)$: $\bar{y}(t)$

$y'' + ay' + by = f_2(t)$: $\bar{\bar{y}}(t)$

$\bar{y} + \bar{\bar{y}}$ è soluzione di $y'' + ay' + by = f_1(t) + f_2(t)$? SI

$$(\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}) + (\bar{\bar{y}}'' + a\bar{\bar{y}}' + b\bar{\bar{y}}) = f_1(t) + f_2(t)$$

ATTENZIONE:

non è importante ricordare i coefficienti che entrano in gioco nelle 3 soluzioni, bensì che ci sono 3 casi e che in dipendenza da essi si devono scegliere le sol. particolari.

OPERATIVAMENTE

data la $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t}$

1°) risolvere l'omogenea associata e in particolare l'equazione caratteristica:

$(*) \qquad r^2 + ar + b = 0$

2°) controllare se λ è soluzione dell'eq. $(*)$

- SE LA RISPOSTA È NO la sol. part. ha la forma
  $\bar{y}(t) = k e^{\lambda t}$
- SE LA RISPOSTA È SÌ, controllare se λ è soluzione di
  $(r^2 + ar + b)' = 0 \qquad$ cioè di $2r + a = 0$
  - SE LA RISPOSTA È NO la sol. part. ha la forma
    $\bar{y}(t) = k t e^{\lambda t}$
  - SE LA RISPOSTA È SÌ la sol part. ha la forma
    $\bar{y}(t) = k t^2 e^{\lambda t}$

3°) in base alle risposte ottenute – e alle corrispondenti forme di sol. part. $\bar{y}(t)$ trovate – sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. e trovare il valore di k.

Se si sceglie una forma sbagliata per difetto di potenza ($kt^i e^{\lambda t}$ invece di $kt^j e^{\lambda t}$ con $j > i$) l'equazione che proviene da (3°) non ha soluzione; se è sbagliata per eccesso di potenza, la stessa equazione non è un'identità in t.

se $f(t) = Ae^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$, $(\omega \neq 0)$

Sostituendo nell'eq. diff.

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e le sue derivate si perviene a un sistema che differisce dal precedente solo per lo scambio dei termini noti (0 e A). Ancora la soluzione esiste ed è unica, a meno che $\begin{cases} \lambda = -a/2 \\ \Delta = -4\omega^2 \end{cases}$

In questo caso la soluz. da scegliere è

$$\bar{y}(t) = k t e^{\lambda t} \cos \omega t \qquad \text{con } k = \frac{-A}{2\omega}.$$

$\boxed{\text{Operativamente}}$

Data $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t} \cos \omega t$ $\boxed{(\omega \neq 0)}$

1°) risolvere l'omog. associata e in particolare l'equaz. caratter. $r^2 + ar + b = 0$.

2°) guardare il discriminante di tale equazione:

$$\Delta = a^2 - 4b$$

Se $\Delta > 0$ non può essere $\omega^2 = -\frac{\Delta}{4}$
Se $\omega \neq 0$ non può essere contemporaneamente $\Delta = 0$ e $\omega^2 = -\frac{\Delta}{4}$!

- Se $\Delta \geq 0$ la sol. part. dell'eq. diff. ha la forma:

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

Sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. per ricavare c_1 e c_2 via sistema lineare di 2 eq. in c_1, c_2.

- Se $\Delta < 0$ valutare la derivata di $r^2 + ar + b$ in $r = \lambda$:
  - se $2\lambda + a \neq 0$ la sol. part. è quella già segnalata al caso precedente
  - se $2\lambda + a = 0$ la sol. part. dell'eq. diff. ha la forma

$$\bar{y}(t) = k t e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$$

Sostituire $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ nell'eq. diff. per trovare k.

Vale schema analogo per $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$.

(1)

$$y'' + 3y' + 2y = t^2 + 2t$$

Eq. diff. lineare II ord. a coeff. cost.
completa con termine noto polinomio.

1) Ricerca delle soluz. dell'omog. assoc.

$$z'' + 3z' + 2z = 0$$

$\to$ eq. caratt. : $r^2 + 3r + 2 = 0$

$$r_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$$z(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

2) E' presente il coeff. di y

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(t) = a + bt + ct^2$$

derivo $\bar{y}'(t) = b + 2ct$

$\bar{y}''(t) = 2c$

Sostituisco

$$2c + 3(b + 2ct) + 2(a + bt + ct^2) \equiv t^2 + 2t$$

$$2ct^2 + (6c + 2b)t + 2c + 3b + 2a \equiv t^2 + 2t$$

$$\begin{cases} c = 1/2 \\ 6c + 2b = 2 \\ 2c + 3b + 2a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 1/2 \\ b = -1/2 \\ 1 - \frac{3}{2} + 2a = 0 \Rightarrow a = 1/4 \end{cases}$$

Sol. generale dell'eq. data:

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

(2) $y'' + 3y' - 4y = 2e^t \cos 3t$

Eq. diff. lineare del 2° ordine a coeff. cost. completa con termine noto $\underline{Ae^{\lambda t} \cos \omega t}$

1°) Sol. omog. associata

$z'' + 3z' - 4z = 0 \xrightarrow[\text{eq caratt.}]{} r^2 + 3r - 4 = 0$

$r_{1,2} = 1, \ -4$

Sol. gen. omog associata $z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}$

2°) $\Delta > 0$. Cerco una soluz del tipo

$\boxed{-4}$ $\bar{y}(t) = e^t (c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t)$

derivo

$\boxed{3}$ $\bar{y}'(t) = e^t (c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t + 3c_2 \cos 3t - 3c_1 \operatorname{sen} 3t)$

$= e^t ((c_1 + 3c_2) \cos 3t + (c_2 - 3c_1) \operatorname{sen} 3t)$

$\boxed{1}$ $y''(t) = e^t ((c_1 + 3c_2) \cos 3t + (c_2 - 3c_1) \operatorname{sen} 3t + 3(c_2 - 3c_1) \cos 3t - 3(c_1 + 3c_2) \operatorname{sen} 3t)$

$= e^t (\cos 3t (6c_2 - 8c_1) + \operatorname{sen} 3t (-6c_1 - 8c_2))$

sostituisco nell'eq. diff dividendo per e^t

$(6c_2 - 8c_1) \cos 3t + (-6c_1 - 8c_2) \operatorname{sen} 3t +$
$+ 3(c_1 + 3c_2) \cos 3t + 3(c_2 - 3c_1) \operatorname{sen} 3t +$
$- 4c_1 \cos 3t - 4c_2 \operatorname{sen} 3t = 2 \cos 3t$

$(15c_2 - 9c_1) \cos 3t + (-15c_1 - 9c_2) \operatorname{sen} 3t = 2 \cos 3t$

$\begin{cases} 15c_2 - 9c_1 = 2 \\ 9c_2 + 15c_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -25c_1 - 9c_1 = 2 \\ c_2 = -\frac{5}{3} c_1 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1 = -1/17 \\ c_2 = 5/51 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \left(-\frac{1}{17}\cos 3t + \frac{5}{51}\operatorname{sen} 3t\right)e^{t} + c_1 e^{t} + c_2 e^{-4t}$$

(3)

$$y'' + 2y' + 3y = 3e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t$$

Eq. diff. lin. II ordine completa con termine noto del tipo $A e^{\lambda t}\cos\omega t$

1°) Sol. omog. $\quad z'' + 2z' + 3z = 0$

eq. caratt. $\quad z^2 + 2z + 3 = 0$

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm \sqrt{2}\,i$$

$$Z(t) = e^{-t}\left(c_1 \cos\sqrt{2}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\right)$$

2°) visto che $2\lambda + a = 2(-1) + 2 \equiv 0$

si deve cercare una soluzione della forma

$$\bar{y}(t) = k\underbrace{e^{-t}\cdot t}\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$$

Si può anche rappresentare come

$$\bar{y}(t) = a(t)\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$$

per esercizio provare a sviluppare in entrambi i modi, come mostrato nell'esempio successivo

(4) $y'' + y = \cos t$

Eq diff. lin. II ordine completa con coeff dello forma $Ae^{\lambda t}\cos\omega t$: $A = 1$
$\lambda = 0$
$\omega = 1$

1°) omog. ass. $z'' + z = 0$
eq. caratteristica $r^2 + 1 = 0$ $r = \pm i$
$\alpha = 0$ $\beta = 1$

soluzione $z(t) = e^{0t}(c_1 \cos 1 \cdot t + c_2 \operatorname{sen} 1 \cdot t) =$
$= c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$

ATTENZIONE : $\cos t$ (termine noto) è una sol. dell'omogenea.

2°) Ricerca della sol. particolare tra quelle della forma

$\bar{y}(t) = k t \operatorname{sen} t$

$\bar{y}'(t) = k(\operatorname{sen} t + t \cos t)$

$\bar{y}''(t) = k(\cos t + \cos t - t \operatorname{sen} t)$

$k(2\cos t - \cancel{t \operatorname{sen} t} + \cancel{t \operatorname{sen} t}) = \cos t$

$2k \cancel{\cos t} = \cancel{\cos t}$ $k = \frac{1}{2}$

$\bar{y}(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$

3°) Int. gen. $y(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$

oppure

$\bar{y}(t) = a(t)\,\text{sen}\,t$

$\bar{y}'(t) = a'\cdot\text{sen}\,t + a\cos t$

$\bar{y}''(t) = a''\,\text{sen}\,t + 2a'\cos t - a\,\text{sen}\,t$

sostituisco in $y'' + y = \cos t$

$\text{sen}\,t\,(a'' - \cancel{a} + \cancel{a}) + \cos t\,(2a') \equiv \cos t$

$\begin{cases} a'' = 0 \\ 2a' = 1 \end{cases}$ coerente con la 2ª e quindi inutile

$a' = \frac{1}{2} \Rightarrow a(t) = \frac{1}{2}t$

$\rightarrow \boxed{\bar{y}(t) = \frac{1}{2}t\,\text{sen}\,t}$

---

5 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1°) Omog. assoc. $z'' - 2z' + z = 0$
eq. caratt. $r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0 \qquad r = 1$

le soluz dell'omogenea sono del tipo

$z(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$

2°) Sol. part. $\bar{y}(t) = k t^2 e^t$; $\bar{y}' = k(2t + t^2)e^t$

$\bar{y}'' = k\,(2 + 2t + 2t + t^2)\,e^t$

$$k\left(2+\cancel{4t}+\cancel{t^2}-\cancel{4t}-\cancel{2t^2}+\cancel{t^2}\right)\cancel{e^t}=\cancel{e^t}1$$

$$2k=1$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(t)=\frac{1}{2}t^2e^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(t)=\frac{1}{2}t^2e^t+c_1e^t+c_2te^t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

$$y'(t)=te^t+\frac{1}{2}t^2e^t+c_1e^t+c_2e^t+c_2te^t$$

$$y(0)=\cancel{0}+c_1e^0+c_2\cdot\cancel{0e^0}=0 \qquad c_1=0$$

$$y'(0)=\cancel{0e^0}+\cancel{\frac{1}{2}0\cdot e^0}+\cancel{0e^0}+c_2e^0+c_2\cdot\cancel{0e^0}=1$$

$$\Rightarrow \quad c_2=1$$

Sol. del probl. di Cauchy è

$$y(t)=\frac{1}{2}t^2e^t+te^t$$

⑥ $\begin{cases} y''+y'-2y = e^t + t \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ Risolvere il pr. di Cauchy.

Riconoscimento: eq. diff. lineare 2° ordine completa con coeff. SOMMA di 2 funzioni una esponenziale e una polinom.

1°) Sol. omogenea $z''+z'-2z=0$

eq. caratt. $r^2+r-2=0$ $\quad r=1$, $r=-2$

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

2°) Sol. part. di $y''+y'-2y=e^t$

essendo il coeff. 1 dell'esponente di e^t = una radice della caratteristica:

$$\bar{y}_1(t) = k t e^t$$

$\bar{y}_1'(t) = k(t+1)e^t \qquad \bar{y}_1''(t) = k(t+2)e^t$

Sostituisco

$$k(\cancel{t}+2+\cancel{t}+1-\cancel{2t})\cancel{e^t} = \cancel{e^t} \Rightarrow 3k=1$$

$$\bar{y}_1(t) = \frac{1}{3} t e^t$$

3°) Sol. part. $y''+y'-2y=t$

il coeff. di y è $\neq 0 \Rightarrow \bar{y}_2(t) = a+bt \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}_2' = b \Rightarrow \bar{y}_2''=0$

Sostituisco $0+b-2a-2bt = t$

$\begin{cases} b-2a=0 \\ -2b=1 \end{cases}$ $\quad a=-1/4$, $b=-1/2$ $\quad \Rightarrow \bar{y}_2(t) = -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t$

Integrale generale:

$$y(t) = \frac{1}{3} te^t - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$$y'(t) = \frac{1}{3} e^t + \frac{1}{3} te^t - \frac{1}{2} + c_1 e^t - 2 c_2 e^{-2t}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 - \frac{1}{4} + 0 + c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{2} + c_1 - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5/4 \\ c_1 - 2c_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$3c_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{6} = \frac{13}{12}$

$c_2 = \frac{13}{36}$

$c_1 = \frac{5}{4} - \frac{13}{36} = \frac{32}{36}$

Sol. probl. Cauchy:

$$y(t) = \frac{1}{3} te^t - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{8}{9} e^t + \frac{13}{36} e^{-2t}$$

Compiti delle VACANZE. Risolvere:

1) $y'' - 2y' + y = 2e^t \cos 3t$
2) $y'' + 3y' + 2y = 2 \operatorname{sen} 4t$
3) $y'' + 3y' = t^2 + 1$
4) $y'' + 9y = t - e^t$
5) $y'' + 2y' + 3y = 2t^2 - 1$
6) $y'' + y = \cos 3t$
7) $y'' + y = e^t (t^2 - 1)$
8) Risolvere probl. di Cauchy: $\begin{cases} y'' + 3y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$