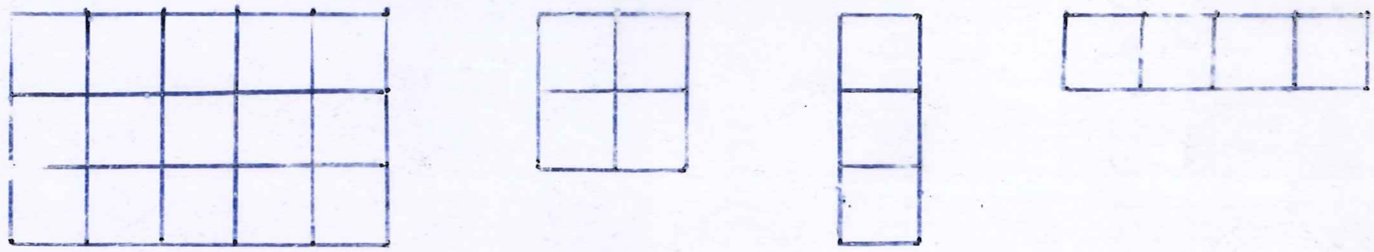
MATRICI



Matrice di tipo (m,n) o a m RIGHE (orizzontali) e n COLONNE (verticali) è un insieme di $\boxed{m \cdot n}$ numeri reali disposti in tabella

MATRICI QUADRATE	(n,n)
VETTORI RIGA	$(1,n)$
VETTORI COLONNA	$(m,1)$

Si scriverà $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

A, B di tipo (m,n), o $m \times n$

$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1,\dots,m,\ \forall j = 1,\dots,n$

$A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

$\forall t \in \mathbb{R}: \quad tA = (ta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Spazio vettoriale delle matrici (m,n) ha dimensione $m \cdot n$.

Il prodotto tra matrici <u>non si fa</u> COMPONENTE PER COMPONENTE bensì RIGHE PER COLONNE

$$(a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

ATTENZIONE: è un prodotto scalare

In generale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\boxed{m,n}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1h} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nh} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}}_{\boxed{n,p}} = \underbrace{\begin{array}{c} \text{colonna } h \\ \text{RIGA } k \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jh} \end{pmatrix} \end{array}}_{\boxed{m,p}}$$

elem. di posto (k,h)

Esempio di prodotto di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} (1,1) & (1,2) \\ \left(\begin{array}{c|c} (1,0,-1)\cdot(2,1,0) & (1,0,-1)\cdot(0,1,1) \\ \hline (5,1,3)\cdot(2,1,0) & (5,1,3)\cdot(0,1,1) \end{array}\right) \\ (2,1) & (2,2) \end{array}$$

(2×3) (3×2)

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2+0 & 0+0 & -2+0 \\ \hline 1+5 & 0+1 & -1+3 \\ \hline 0+5 & 0+1 & 0+3 \end{array}\right)$$

$(3\times 2) \cdot (2\times 3) \longrightarrow (3\times 3)$

CIOÈ:

Non vale la propr. commutativa del prodotto

ATTENZIONE:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

non vale la proprietà commutativa del prodotto anche se le due matrici sono quadrate dello stesso ordine.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{pmatrix}$$

La matrice $n \times n$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$

è tale da risultare "ininfluente" nel prodotto:

$$\underset{(m \times n)}{A} I = A$$

$$I \underset{(n \times p)}{B} = B$$

Chiamo I matrice identica (o identità): è l'elemento Neutro rispetto al prodotto di matrici

---

L'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a coeff. reali: $M(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$
con le operazioni di SOMMA di MATRICI
prodotto scalare-MATRICE
prodotto di Matrici

è un'algebra su $\mathbb{R}$ (= sp. vettoriale + prodotto con propr. assoc., distributiva, elem neutro) <u>non commutativa</u> e <u>non tutti gli elementi diversi da zero</u> $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ <u>sono invertibili</u>.

(NOTA: anche $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un'algebra su $\mathbb{R}$! ma in questo caso l'algebra è commutativa e ogni elem. $\neq 0$ è invertibile)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esiste $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ tale che $A \cdot B = I$?

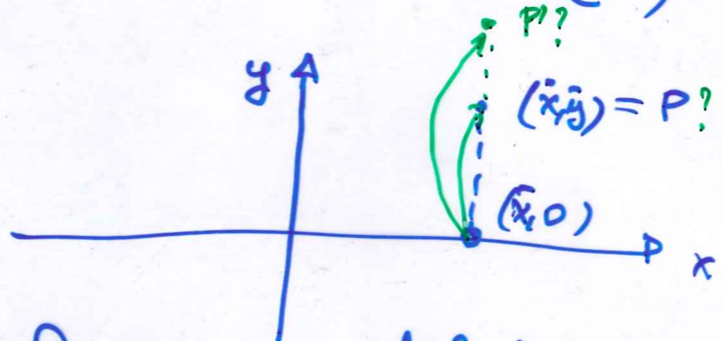
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{NO}$$

$\Longrightarrow$ A non è invertibile.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$



è una trasformazione del piano non invertibile.

Terminologia. Sia A una matrice $n \times n$

1) dico che A è diagonale se $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

2) dico che A è triangolare alta se $a_{ij} = 0$ $\forall (i,j)$ con $i > j$

V10.4

3) dico che A è <u>triangolare bassa</u> se $a_{ij}=0$ $\forall (i,j)$ con $i<j$

	0	0	0
		0	0
			0

4) Supponiamo che A sia $m \times n$ (event. $m \neq n$)

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
0	a_{22}	a_{23}	a_{24}
0	0	a_{33}	a_{34}

: rettangolare RIDOTTA

a_{11}	a_{12}
0	a_{22}
0	0

5) sia A una matr. $\boxed{(m \times n)}$

<u>la trasposta</u> di A : A^T, A^t

è una matrice $\boxed{(n \times m)}$ t.c. l'elemento di posto (i,j) sia a_{ji}

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici devono essere conformabili perché si possa fare il prodotto.

$$A = (1, -1, 0) \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad AB = \qquad BA =$$

Come sono AB e BA?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad AB = \qquad BA =$$

Come sono AB e BA?

Comunque: prodotto associativo e distributivo

A di tipo (m,n), B (n,p), C (p,q) $\Longrightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

A, B di tipo (m,n), C (n,p) $\Longrightarrow (A+B) \cdot C = AC + BC$

MATR. QUADRATE

Matrice identica $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix}$: ininfluente nel prodotto

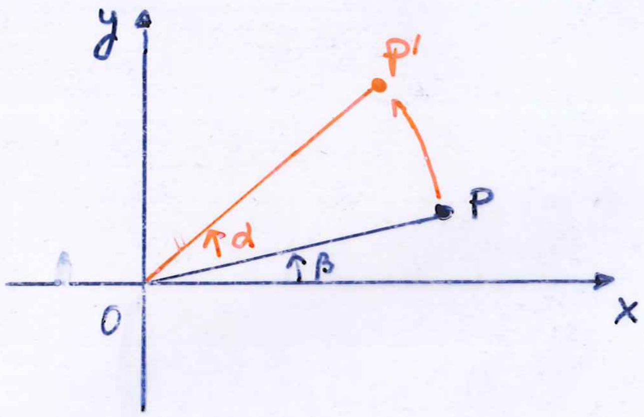
Matrici diagonali (quadrate)

Matrici triangolari (ALTE o BASSE)

Matrici rettangolari ridotte: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Matrici trasposte

Rotazioni nel piano, aventi centro nello stesso punto (origine del sistema)



$P = (x, y)$ $\begin{cases} x = \rho \cos\beta \\ y = \rho \operatorname{sen}\beta \end{cases}$

$P' = (x', y')$ $\begin{cases} x' = \rho \cos(\alpha+\beta) \\ y' = \rho \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha \\ y' = x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Riscrivo:

Fare due rotazioni successive vuol dire fare il prodotto di 2 matrici di quel tipo

Chiamo A quella relativa alla rotaz. di α
A' " " " " " α' che porta (x', y') in (x'', y''):

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{A'A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

com'è la matrice della rotazione di $(-\alpha)$?
E facendo il prodotto con A che cosa succede?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha \\ x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la rotazione di α (intorno a O) è rappresentata da una matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Prendo una rotazione di α' (intorno a O)

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\operatorname{sen}\alpha' \\ \operatorname{sen}\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix}$$

Considero il punto trasformato di (x', y') mediante qs. rotaz.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A'A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A'A = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\operatorname{sen}\alpha' \\ \operatorname{sen}\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha'+\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha'+\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha'+\alpha) & \cos(\alpha'+\alpha \end{pmatrix}$$

e questa è davvero la matrice della composizione successiva delle due rotazioni (rotazione di $\alpha+\alpha'$).

DETERMINANTE di una matrice QUADRATA

(Se la matrice NON è quadrata, NON c'è determinante)

Connessioni:

- PROBLEMA DELL'INVERTIBILITÀ DELLA MATRICE
- RANGO DI UNA MATRICE (m,n)
- RISOLUBILITÀ DI SISTEMI LINEARI (m,n)
- RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI (m,n)
- INDIPENDENZA DI UN INSIEME DI VETTORI
- CALCOLO AUTOVALORI DI UNA MATRICE QUADR.

Ne diamo una definizione ricorsiva basata su qualche esperienza precedente.
Quando è indipendente l'insieme di

- 1 vettore di $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: $\underline{u} = (a_{11})$
- 2 vettori di $\mathbb{R}^2$: $\underline{u} = (a_{11}, a_{12})$; $\underline{v} = (a_{21}, a_{22})$
- 3 vettori di $\mathbb{R}^3$: $\underline{u} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$
  $\underline{v} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$
  $\underline{w} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$?

Risposte:

- $\underline{u} \neq \underline{0} \quad \Rightarrow \quad a_{11} \neq 0$
- $\underline{u} \neq t\underline{v}$ e $\underline{v} \neq \underline{0} \quad \Rightarrow \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$
- $\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

faccio il prodotto con segno opportuno di tutti gli assortimenti di elementi che stanno in righe e colonne diverse

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}.$$

det di questa matrice ottenuta togliendo la 1ª riga e la 1ª colonna: M_{11}

M_{1j} : minore complementare di a_{1j}

Quanti prodotti devo fare per sviluppare questo determinante? $n!$

Chiamo determinante delle matrici

$$(a_{11}) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

"il numero che risulta .... determinante per stabilire se i vettori riga che compaiono in queste matrici sono indipendenti". Cioè

DEFINIZIONE. Sia $A = (a_{ij})$ quadrata di ordine n. Il determinante di A è un numero reale così definito:

- se $n = 1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$
- se $n = 2$: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Più in generale, supposto di aver definito il determinante di matrici di ordine $n-1$,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} + \ldots (-1)^{n+1} a_{n1}M_{n1}$$

ove M_{i1} è il determinante della matrice che si ottiene da A togliendo la 1^a colonna e la i-esima riga.

TERMINOLOGIA: M_{i1} MINORE COMPLEMENTARE di a_{i1}

$A_{i1} = (-1)^{i+1} M_{i1}$ COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{i1}

La terminologia si estende a M_{ij}, A_{ij}

Vale il

TEOREMA di LAPLACE. Comunque si scelga $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}$$ CALCOLO PER COLONNE

$$= a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + \dots + a_{kn} A_{kn}$$ CALCOLO PER RIGHE

Es. 1) $\det \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

PROPRIETÀ. (PER COLONNE: rileggerle poi per RIGHE)

1) Se in A c'è una colonna di zeri: $\det A = 0$

2) Se A' è ottenuta da A scambiando due colonne

$$\det A' = -\det A$$

Es: $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$

- Conseguenza: se in A 2 colonne sono $=$: $\det A' = \det A = 0$ poiché $\det A' = -\det A$ ma $A = A'$

ES 1

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \det A$$

con la def iniziale

$$\det A = 8 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(12 + 5\cdot 0) - 2(16 - 30) - 1(4\cdot 0 + 18) =$$

$$= 96 + 28 - 18 = 106$$

Laplace: sviluppo lungo la II colonna:

$$\det A = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-14) + 3(32 - 6) = 28 + 3\cdot(26) = 106$$

ES 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

3)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot 2$$

il det. di una matrice triangolare (alta ma va bene anche se è bassa o se in part. è diagonale è il prodotto degli elementi sulla diagonale.