Vale il

TEOREMA di LAPLACE. Comunque si scelga $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}$$ CALCOLO PER COLONNE

$$= a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + \dots + a_{kn} A_{kn}$$ CALCOLO PER RIGHE

$\boxed{\text{Es.}}$ 1) $\det \begin{pmatrix} 8 & \boxed{2} & -1 \\ 4 & \boxed{3} & -5 \\ -6 & \boxed{0} & 4 \end{pmatrix} =$

2) $\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

PROPRIETÀ. (PER COLONNE: rileggerle poi per RIGHE)

1) Se in A c'è una colonna di zeri: $\det A = 0$

2) Se A' è ottenuta da A scambiando due colonne
$$\det A' = -\det A$$

Es: $\begin{vmatrix} \boxed{2} & 8 & -1 \\ \boxed{3} & 4 & -5 \\ \boxed{0} & -6 & 4 \end{vmatrix} =$

- Conseguenza: se in A 2 colonne sono $=$: $\det A' = \det A = 0$
  poiché $\det A' = -\det A$ ma $A = A'$

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{3+2}(-6)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(-10+3) + 4(8-24) =$$

$$= -42 - 64 = -106$$

VERIFICA della PROPRIETÀ 4 pag V16

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{=0}$$

rileggo così

$$= (a_{11}+\lambda a_{21})a_{22} - (a_{12}+\lambda a_{22})a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + \underbrace{(\lambda a_{21}a_{22} - \lambda a_{22}a_{21})}_{=0}$$

è il det. $\begin{bmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

3) Moltiplicando per $\lambda \in \mathbb{R}$ una colonna di A si ha una matrice A' con: $\det A' = \lambda \det A$.

- Conseguenza (1): $\det(\lambda A) = \lambda^n |A|$
- Conseguenza (2): se A contiene colonne proporzionali, $\det A = 0$

4) Aggiungendo a una colonna una combinazione lineare delle altre, il determinante non cambia

ES. Ricalcolare (SOTTRAZIONE DI COLONNE e CALCOLO X RIGHE)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

in particolare se una colonna è comb. lin. delle altre....

5) TEOREMA DI BINET: A, B quadrate d'ordine $n \Rightarrow$

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$$

6) $\det A^T = \det A$

Rileggere PRODOTTO VETTORIALE e MISTO in termini di DETERMINANTI 3x3.

MATRICI INVERSE

B è detta inversa di A se: $AB = BA = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix}$

Si denota l'inversa di A con A^{-1} e si dice che A è INVERTIBILE.

Se esiste A^{-1}: $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ ed entrambi sono NON NULLI.

VICEVERSA:

se $\det A \neq 0$ esiste A^{-1} e si calcola come

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO svolto con propr. (2_i) V16.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Tolgo 1 volta la 1^a riga alla 3^a (e il det non cambia)
nuova 3^a riga $= 3^a - 1^a$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

V17.1

Inversa di
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Esiste? $\det A = -2 \neq 0$: sì esiste

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ 0 & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ 0 & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} \to A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$a_{12} \to A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$a_{13} \to A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Es. Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$

la sua inversa è $\dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

In particolare $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ che ha

$\det A : \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ ha inversa

$A^{-1} : \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ... come visto geometricamente

Se avete la curiosità di capire "perché" l'inversa è fatta così: OSSERVATE:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} & \boxed{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}} \end{pmatrix}$$

- Le cose RIQUADRATE valgono: $\det A$ (Teor. di Laplace)
  - secondo la 1ª riga
  - secondo la 2ª riga
- le altre sono nulle perché corrispondono a trovare il determinante di una matrice con una riga ripetuta: talora questo si chiama 2° TEOR. di LAPLACE.
- Lo stesso discorso vale anche se prendo una matrice (n,n), con $n > 2$.

Es (sul testo errato)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Sistemi lineari =

Sistemi di EQUAZIONI algebriche di 1° grado.

Numero di equazioni : m

" " incognite : n

non è detto che coincidano

Convenzione: al primo membro le incognite

" secondo " i "termini noti"

Raffinamento: le incognite in ogni equazione si susseguono nello stesso ordine.

Es: $\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 4x - \frac{1}{3}y + z = 0 \\ \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases}$

Entrambi sistemi di 2 equazioni in 3 incognite.
Il secondo sarà detto

OMOGENEO

poiché i termini noti sono nulli.

- Tutti i sistemi omogenei hanno <u>almeno</u> 1 soluzione(*): $(x,y,z) = (0,0,0)$
- Ma non è detto che sia l'unica. Nell'esempio:

$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(\frac{1}{3} - \sqrt{2})t \\ y = t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ al variare di t in $\mathbb{R}$ sono tutte soluzioni.

Geometricamente:

E nel primo esempio?

(*) ATTENZIONE: le soluzioni di un sistema in n incognite sono n-uple ordinate soddisfacenti tutte le equazioni del sistema.

V18.1

$$\begin{cases} 4x - \frac{1}{3}y + z = 0 \\ z = \sqrt{2}\,y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - \frac{1}{3}t + \sqrt{2}\,t = 0 \\ y = t \\ z = \sqrt{2}\,t \end{cases} \qquad x = \left(\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)t$$

sono sol. del sistema tutte le terne (x,y,z) della forma $\left(\left(\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)t,\ t,\ \sqrt{2}\,t\right)$ al variare di t in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

sottraggo 3 volte la 2ª eq. alla 1ª

$$\begin{cases} 0x + 0y - z = -2 \\ 2x - y = 2 - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = 2x \end{cases}$$

Soluzioni

$$(x,y,z) = (t, 2t, 2) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Metodo di Sol. di GAUSS (-JORDAN)

ESEMPIO 1.

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+3y-z=1 \\ 3x+y+2z=4 \end{cases}$$

3 eq. in 3 incognite

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ è la matr. (associata dei coeff.)

$$(A|\underline{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

supposto il coeff $a_{11} \neq 0$, - come in questo caso - Vado a sottrarre un opportuno multiplo della 1ª riga alla 2ª e alla 3ª, in modo da costruire una nuova matrice che in posiz (2,1) e (3,1) abbia ZERO

sommo 2 volte la 1ª alla 2ª riga
3 " 1ª 3ª "

Il sist. ottenuto è equivalente!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2-2 & 3-4 & -1+2 & 1-2\cdot 0 \\ 3-3 & 1-6 & 2+3 & 4-3\cdot 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & -1 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & -5 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Cerco di annullare il coeff. in posiz. (3,2) sottraggo 5 volte la 2ª riga alla terza:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$ $\leftarrow$ IMPOSSIBILE!

$\Rightarrow$ SIST. IMPOSSIBILE

Calcolo dell' inversa di

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&3\\0&0&2\end{pmatrix}$$

col metodo di GAUSS-JORDAN.

cercare A^{-1} significa cercare $B=(b_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ tale che

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&3\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{21}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

incognite

termine noto

$\Rightarrow$ 3 sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti A e termini noti $\neq$.

Raccolgo in unica matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&3&0&1&0\\0&0&2&0&0&1\end{array}\right)$$

trasformo con il metodo di G-J fino a far comparire a sinistra I.

moltiplico la 3ª riga per 1/2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&\boxed{3}&1&0&0\\0&-1&\boxed{3}&0&1&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

sommo 3 volte la 3ª riga (per -1) alla 1ª e alla 2ª

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&-\frac{3}{2}\\0&-1&0&0&1&-3/2\\0&0&1&0&0&1/2\end{array}\right)\xrightarrow[\text{per }(-1)]{2^a\text{ riga}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&-3/2\\0&1&0&0&-1&3/2\\0&0&1&0&0&1/2\end{array}\right)$$

sottraggo 2 volte la 2ª riga

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{matrix}\right)$$

$\underbrace{}_{A^{-1}}$

$\boxed{\text{A CASA}}$

<u>Esercizio</u>: moltiplicare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ a sinistra per la

matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

$$BA$$

Che cosa succede ?

Lo stesso con la matrice

$$C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad k \neq 0$$

$$C \cdot A \; ?$$

ESEMPIO 2:

Sist. di 3 eq. 4 inc.

$$\begin{cases} 2x+6y+3z+w=1 \\ x+4y+z+2w=1 \\ x+2y+2z-w=0 \end{cases}$$

passo al sistema ridotto

$$\begin{cases} x+4y+z+2w=1 \\ x+2y+2z-w=0 \\ 2x+6y+3z+w=1 \end{cases}$$

Trovo $(A|\underline{b})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

aggiungo
(−1) 1ª riga alla 2ª riga
(−2) 1ª " alla 3ª riga

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

sottrarre alla 3ª riga la 2ª

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

→ questa equazione dipende dalle prime due

il fatto che l'ultima sia una riga di zeri dice che (chiamate $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ le 3 righe della matrice $(A|\underline{b})$) risulta $\underline{v}_3 - 2\underline{v}_1 = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0} \Rightarrow$ 3 righe dipendenti

⇒ quante soluzioni ho?

$$\begin{cases} x + 4y + z + 2w = 1 \\ \quad -2y + z - 3w = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 1 - 4y + 2w \\ \quad z = -1 + 2y + 3w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 6s - t \\ y = s \\ z = -1 + 2s + 3t \\ w = t \end{cases}$$

soluzioni dipendenti da 2 parametri s e t

$$(2 - 6s - t, \; s, \; -1 + 2s + 3t, \; t)$$

COMPITO A CASA

$$\begin{cases} (k+1)x + ky = 1 \\ -kx + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

3 eq. in 3 incognite dipendente da k

Per usare Gauss sposto la 3ª eq. in 1ª posizione

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ (k+1)x + ky = 1 \\ -kx + z = 1 \end{cases} \longrightarrow (A \mid \underline{b})$$

SOL: se $k = -1$: VUOTO

$k = 1$: infinite sol....

$k \neq \pm 1$: 1 e 1 sola soluz.

Soluzioni degli esercizi "A CASA"

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ k+1 & k & 0 & 1 \\ -k & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} 2^a \text{ riga } -(k+1) \text{ volte } 1^a \text{ riga} \\ 3^a \text{ '' } \quad +k \text{ volte } \quad 1^a \text{ riga} \end{array}} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ k+1-(k+1) & k-(k+1) & -(k+1) & 1-2(k+1) \\ -k+k & k & 1+k & 1+2k \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -(k+1) & -1-2k \\ 0 & k & 1+k & 1+2k \end{array}\right) \rightsquigarrow \boxed{3^a \text{ riga } + k \text{ volte } 2^a \text{ riga}} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -(k+1) & -1-2k \\ 0 & k-k & (1+k)(1-k) & 1+2k+k(-1-2k) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -(k+1) & -(1+2k) \\ 0 & 0 & (1+k)(1-k) & (1-k)(1+2k) \end{array}\right)$$

NB: $(1+k)(1-k) = \det A$

L'ultima equazione $(1+k)(1-k)z = (1-k)(1+2k)$ è un'identità in z se $k=1$, mentre è impossibile se $k=-1$ (diventa $0 \cdot z = -1$) $\Rightarrow$

sistema impossibile se $k=-1$

indeterminato se $k=1$: equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & +1 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ +3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2-3+2t-t \\ y = 3-2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{al variare di } t, \ \infty \text{ soluz.}$$

Per $x \neq \pm 1$ si può dividere l'ultima equaz. per $1-k^2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -(k+1) & -(1+2k) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+2k}{1+k} \end{array}\right) \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{moltiplico la } 2^a \text{ riga per } -1 \\ \text{e le sottraggo } (k+1) \text{ volte la } 3^a \end{array}} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & +1 & 0 & 1+2k-(1+2k) \\ 0 & 0 & 1 & 2-1/(1+k) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\frac{1}{1+k} \end{array}\right) \sim \boxed{\begin{array}{l} \text{sottraggo } 2^a \text{ e } 3^a \\ \text{riga dalla } 1^a \end{array}} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/(1+k) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-1/(1+k) \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sol. unica:}$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{1+k}, 0, 2-\frac{1}{1+k}\right)$$