Algebra lineare

RIASSUNTO

matrici A : $m \times n$ (righe - colonne)

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{comb. lineare delle colonne di } A \text{ mediante i coeff. } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$= \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix}$$

realizza una <u>funzione</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Matrici quadrate $n \times n$ (di ordine n)

data A esiste B

$$A \cdot B = B \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} ?$$

in generale no

Ciò succede se e solo se $\det A \neq 0$

Cioè

TEOR : la matrice quadrata di ordine n A è invertibile (cioè $\exists B$ t.c. $AB = BA = I$) se e solo se $\det A \neq 0$

L'inversa A^{-1} (se esiste) ha la forma:

$$\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ove A_{ij} è il compl. alg di a_{ij} e

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & & a_{ij} & \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

j Togliere

Risoluzione e risolubilità (dei sistemi di equazioni lineari)

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

m eq. in n incognite $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

colonna dei termini noti

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \underset{DF}{=} \underline{b}$$

matrice dei coefficienti

A $\qquad (A \mid \underline{b})$

Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Matrice dei coefficienti: quadrata. La chiamo A:

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

Risolvo il sistema "come se" fosse un'equazione del tipo $ax=b$: se $a\neq 0$, $x=a^{-1}b$.

Nel caso delle matrici A^{-1} c'è se $\det A\neq 0$.

Dunque:

se $\det A\neq 0$ il sistema ammette 1 e 1 sola soluzione

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

METODO DI CRAMER

se $\det A=0$ - può darsi che il sistema sia indeterminato oppure che sia impossibile. VEDI POI.

Tornando al caso $\det A\neq 0$ ... concretamente?

Guardo come vanno le cose per $n=2$:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+A_{21}b_2\\A_{12}b_1+A_{22}b_2\end{pmatrix}$$

determinante della matrice che si ottiene da A sostituendo alla 1ª colonna $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

analogo sulla 2ª colonna

$$\Rightarrow x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\det A}\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\det A}$$

Discorso che si generalizza a n qualunque

$A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad A$ $n \times n$ $\quad \det A \neq 0$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b}$$
$$(A^{-1}A)\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$
$$I\,\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$
$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

la soluzione esiste ed è unica

motivazione "estesa" della esistenza e unicità della sol.

Verifica di come è formata la soluz

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$$

allora :
$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix} \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}$$

allora :
$$\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}} \end{vmatrix} = b_1 A_{12} + b_2 A_{22}$$

ES. Risolvere

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 4x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \qquad \Rightarrow x =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \qquad \Rightarrow y =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \Rightarrow z =$$

Notare che per sistemi $n \times n$ OMOGENEI:

se $\det A \neq 0$ c'è la sola soluzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

se $\det A = 0$ ci sono infinite soluzioni

↳ MEMORIZZARE PER DISCORSI SU AUTOVALORI

ATTENZIONE. Nulla vieta di risolvere un sistema $n \times n$ (con det. della matrice dei coefficienti $\neq 0$) usando invece di questo METODO (detto di CRAMER) un metodo di SOSTITUZIONE o meglio di ELIMINAZIONE (più sistematico): questo sarà oggetto di lezione a CALCOLO NUMERICO.

Qui abbiamo solo stabilito che la soluzione esiste ed è unica

Soluzione del sistema a pagina V21

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1°) $\det A \neq 0$?

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4-4 & 1+2 & 1-6 \\ 2-2 & 2+1 & -3-3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 6\,(-6+5) = -6 \neq 0$$

2°) Applico metodo di Cramer: esiste 1 e 1 sola soluz.:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{-9}{6} = \frac{3}{2} \\[2em] y = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot(-24) = -4 \\[2em] z = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\,(12) = -2 \end{cases}$$

$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -4, -2\right)$

verifico che $\left(\frac{3}{2}, -4, -2\right)$ è la soluz.

$$\begin{cases} 3+4-6=1 \\ 6-4-2=0 \\ 3-8+6=1 \end{cases}$$

O.K.

fine esercizio!

A livello teorico che cosa mi dice il teor. di CRAMER?

Considero il sist. omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$

se $\det A \neq 0$ $\exists$ 1 e 1 sola soluz.:

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{0} = \underline{0}$$

se $\det A = 0$ esiste la sol. $\underline{0}$ ma ne esistono anche infinite altre. Ad es.:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = 0$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$ è risolubile poiché la sol. $(x,y,z) = (0,0,0)$ c'è sempre. Inoltre

$$\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y=0 \\ \cancel{0x+0y+0z=0} \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

posso eliminare l'ultima identità

Considero z parametro: $z = t$ $t \in \mathbb{R}$

e risolvo il sistema 2x2;

$$\begin{cases} x-y=-2t \\ x+y=0 \end{cases}$$

ha 1 e 1 sola soluz. dipendente da t

$$\begin{cases} 2x=-2t \\ 2y=2t \end{cases}$$

$(x=-t,\ y=t,\ z=t)$ $t \in \mathbb{R}$

Prendiamo ancora $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$

$\boxed{\det A = 0}$

Per quali h il sist. è risolubile?

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y = 2 \\ \boxed{0 = h} \end{cases}$$

→ sì se $h = 0$

no se $h \neq 0$

se $h = 0$ scarto l'ultima equazione e considero $z = t$ come parametro

$$\begin{cases} x - y = 1 - 2t \\ x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 3 - 2t \\ 2y = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = t \end{cases} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

Nota: abbiamo "sperimentato" la validità del seguente TEOR.:

La soluz. di un sistema lineare completo è data dalla somma della soluz. dell'omogenea associata e di una sol. particolare della completa

→ Vedi che cosa succede nelle eq. differenziali lineari....

Rango di una matrice

Fondamentale per stabilire se un sistema è o no risolubile.

Il rango di A è il massimo numero di vettori riga (o colonna: è lo stesso) linearmente indipendenti che stanno in A.
... non è la definizione ufficiale del testo ma serve a non fare conti inutili.

ES. rango di $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 1$ poiché la 2^a riga è multipla della 1^a

Se non si vede a occhio ... diamo questa definizione (equivalente):

rango di A è il più grande intero r ($\leq \min(m,n)$) tale che esista in A una sottomatrice quadrata di ordine r con determinante $\neq 0$.

Es. Se A è quadrata e $\det A \neq 0$, $\operatorname{rg} A = n$.

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché ...

ES. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2 perché $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Introduzione

V22-1

Voglio trovare un metodo che permetta di dire se il sistema è risolubile senza risolverlo, cioè di dire se $\underline{b}$ è lin. dip. dalle colonne di A, senza usare la def di lin dip. lineare.

Si passa attraverso la def. di

$$\boxed{\text{Rango di una matrice}}$$

Valore numerico (intero positivo [comunque]) che posso associare ad ogni matrice.

Svolgimento ~~dell'esercizio!~~

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{è } 4\times 3 \implies \operatorname{rg} A \le \min(3,4)=3$$

$$2 \le \operatorname{rg} A$$

perché $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Vado ad esaminare tutti i det. delle sottomatrici di ordine 3 che posso estrarre da A

Quanti sono? 4: quanti i modi in cui posso "scartare" una riga.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 13 - 2\cdot 13 + 13 = 0$$

0/0

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 7 - 2(7) + 7 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -11 - 2(-11) + (-11) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(+11) + 3(-11) + (-11) = 0$$

$\Rightarrow$ $rg A = 2$ poiché tutte le matrici 3×3 che posso estrarre di A hanno $\det = 0$.

È scomodo.

Per abbreviare, usare la seguente condizione sufficiente

$rg\, A = r$ se e solo se esiste una sottomatrice quadrata di A di ordine r con determinante $\neq 0$
e tutte le sottomatrici di ordine $r+1$ che si ottengono orlando tale matrice .... hanno determinante nullo. (KRONECKER)

Nel caso precedente
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow rg\, A = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

ESERCIZIO.

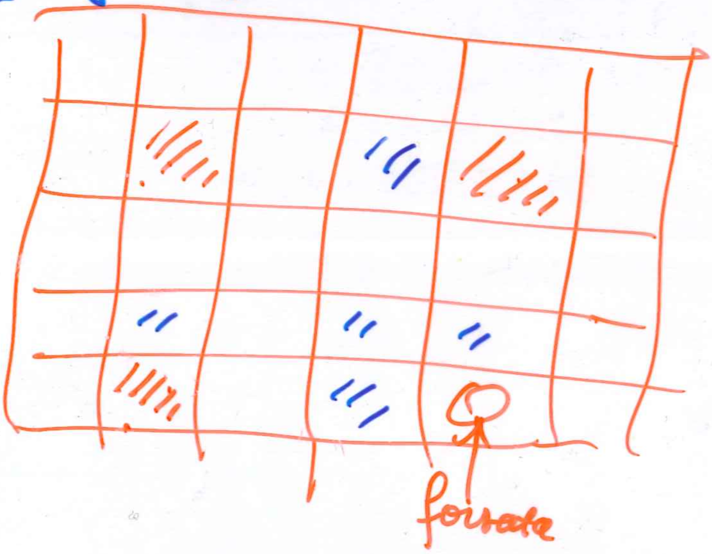
Calcolare il rango di $\begin{pmatrix} 7 & 2K & \boxed{8} & \boxed{9} \\ 1 & -2 & K & K+1 \\ 2K & 1 & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix}$ al variare del numero reale k

Calcolare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2k & \boxed{8} & \boxed{9} \\ 1 & -2 & k & k+1 \\ 2k & 1 & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix}$$

in dipendenza da k

$0 \leq rg\, A \leq 3$



$$\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 45 = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow rg\, A \geq 2$$

KRONECKER

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & k & k+1 \\ 2k & 5 & 6 \end{vmatrix} = 7(\overbrace{6k-5k-5}^{k-5}) - 8(6-2k^2-2k) + 9(5-2k^2) =$$

$$= -2k^2 + k(7+16) - 35 - 48 + 45 =$$

$$= -2k^2 + 23k - 38 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3$$

se è $= 0$ vado a considerare il secondo determinante

$$\begin{vmatrix} 2k & 8 & 9 \\ -2 & k & k+1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2k(6k-5k-5) - 8(-12-k-1) + 9(-10-k) =$$

$$= 2k^2 + k(-10+8-9) + 104 - 90 =$$

$$= 2k^2 - 11k + 14$$

Di fatto parto dal 2° determinante:

$$2k^2 - 11k + 14 = 0 \iff k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 8 \cdot 14}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4} = \begin{cases} 7/2 \\ 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{se } k \neq 2, 7/2}$ il det della 2ª matrice è $\neq 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{rg } A = 3}$

$\boxed{\text{se } k = 2}$ il det. della 1ª matrice vale

$-8 + 46 - 30 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rg } A = 2}$

$\boxed{\text{se } k = \frac{7}{2}}$ il det. della 1ª matrice vale

$$-\frac{49}{2} + \frac{7 \cdot 23}{2} - 38 = -\frac{48}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 23 + 3 \cdot 23 - 38$$

$$= -24 - 38 + \underline{\underline{3 \cdot 23}} + \frac{1}{2} \cdot 22 \neq 0$$

$\Rightarrow \boxed{\text{rg } A = 3}$

Da non fare:

Risolvere anche l'eq.

$$2k^2 - 23k + 38 = 0$$

$$k^2 - \frac{23}{2}k + 19 = 0 \qquad k = 2, \quad k = \frac{19}{2}$$

e fare ragionamenti assurdi.
L'unica cosa che si deduce da questo approccio è

$\det A' = 0$ per $k = \boxed{2}, \frac{19}{2}$

$\det A'' = 0$ per $k = \boxed{2}, \frac{7}{2}$

$\Rightarrow$ entrambi $= 0$ SOLO per $k = 2$

$\Rightarrow \text{rg } A = 2$ per $k = 2$