$$A = \left(\underline{a}_1 \middle| \underline{a}_2 \middle| \cdots \middle| \underline{a}_n \right)$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{= \underline{b}} \iff$$

Dire che il sistema è risolubile significa che esistono $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \cdots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$$

CIOÈ $\underline{b}$ dipende linearmente da $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$

CIOÈ il numero massimo di vettori indipendenti nell'insieme

$$\{ \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b} \}$$

coincide con il numero massimo di vettori indipendenti nell'insieme

$$\{ \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \}$$

Cioè $\quad rg(A | \underline{b}) = rg A$

Tenuto conto che "SIGNIFICA", "CIOÈ" sono solo altri modi di dire "SE e SOLO SE" Abbiamo appena verificato il

TEOREMA di ROUCHÉ CAPELLI:

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|\underline{b})$

Es.

$$\begin{cases} x + w = k \\ y + z = k-1 \\ x + z = 2k-1 \\ y + w = k-3 \end{cases}$$

è risolubile se ...

... e in tal caso le soluzioni sono ......

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ 2k-1 \\ k-3 \end{pmatrix}$$

A'

$\det A = 0$

$\Longrightarrow$ NO CRAMER

svolgimento es.
a pag V24

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad + w = k \\ \quad y + z \quad\quad = k-1 \\ x \quad + z \quad\quad = 2k-1 \\ \quad y \quad\quad + w = k-3 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ 2k-1 \\ k-3 \end{pmatrix}$$

rg A ?

1°) essendo A quadrata parto dal calcolo di

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ rg $A < 4$

2°) È almeno rg $A = 3$?

Considero

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg } A = 3$$ poiché A contiene una sottomatrice quadrata di ordine 3 con det $\neq 0$.

3°) rg$(A|\underline{b})$: $(A|\underline{b})$ contiene la sottomatrice A

$\Rightarrow 3 \leq$ rg$(A|\underline{b}) \leq 4$: verifico per quali

k è esattamente $= 3$

A'

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & k-3 \end{array}\right) = (A|\underline{b})$$

$|A'| \neq 0$

Kronecker: orlo A' in tutti i modi possibili

I) se aggiungo la IV colonna ho la matrice A che so avere $|A| = 0$

II) se aggiungo la V colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 0 & k-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & k \\ 0 & \boxed{1} & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 + k - 1 = 0 \quad \text{per } k = 3$$

$\Rightarrow$ per $k = 3$ $\quad rg(A|\underline{b}) = 3$

per $k \neq 3$ $\quad rg(A|\underline{b}) = 4$

$\Rightarrow$ (Teor. di Rouché-Capelli)

se $k = 3$ $\quad rg\,A = rg(A|\underline{b}) \Rightarrow$ sistema risolubile

se $k \neq 3$ $\quad rg\,A < rg(A|\underline{b}) \Rightarrow$ sistema IMPOSSIBILE sia $k=3$. Se voglio trovare le soluz.

A LIVELLO teorico mi comporto così:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

evidenzio la sottomatrice A' d'ordine 3 con $\det A' \neq 0$

la 4ª riga $\overset{\det(A|b)}{}$ è dipendente dalle altre 3 cioè l'ultima equazione (dipendendo dalle altre) è inutile $\Rightarrow$ passo a un sistema 3×4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

penso le incognite relative alla matrice A' con $\det A' \neq 0$ come incognite e le restanti come parametri

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3-t \\ 0 & 1 & 1 & 2-0\cdot t \\ 1 & 0 & 1 & 5-0\cdot t \end{array}\right)$$

$|A'| \neq 0 \Rightarrow$ Cramer

Le sol. del sistema hanno la forma

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\det A'} \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3-t \\ y = \dfrac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 3-t & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -t \\ z = \dfrac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3-t \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2+t \\ w = t \end{cases}$$

OSSERVAZIONE!

le soluzioni dipendono linearmente da 1 solo parametro t:

numero incognite $-$ rg$A$ =
= numero di gradi di libertà
= numero di parametri

Qui: $4-3=1$

Dunque, una volta stabilito che il sistema

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

è risolubile, per la soluzione procedo così:

- isolo la sottomatrice A'' di A che ha rango massimo;
  quella che ho trovato per garantire: $rg\, A = rg(A|\underline{b}) = r$

  tutte le altre righe di $(A|\underline{b})$ dipendono linearm. dalle righe di $(A|\underline{b})$ che contengono questa sottomatrice: quindi le corrispondenti equazioni nel sistema risultano INUTILI per la soluzione e di conseguenza

- elimino tali $m-r$ equazioni.
  Così ho un sistema $A'\underline{x} = \underline{b}$ di r equazioni in n incognite, avente rango massimo.

- prendo come vere incognite quelle corrispondenti alle colonne di A'', mentre uso le altre come parametri e conseguentemente
  porto queste $n-r$ parametri (con relativi coefficienti) al 2° membro: avrò una colonna di termini noti dipendente da parametri

- Risolvo il sistema di r equazioni in r incognite risultante, ad es. col metodo di Cramer: se queste incognite si chiamano $x_1, \dots, x_r$, le soluzioni sono del tipo

  $x_1 = f_1(k_{r+1}, \dots, k_n), \dots, x_r = f_r(k_{r+1}, \dots, k_n), x_{r+1} = k_{r+1}, \dots x_n = k_n$

  con $k_{r+1}, \dots, k_n$ variabili comunque in $\mathbb{R}$
  e $f_1, \dots, f_r$ funzioni razionali fratte in $k_{r+1}, \dots, k_n$

  $\Rightarrow \infty^{n-r}$ SOLUZIONI

Associamo al precedente sistema completo il corrispondente sistema omogeneo:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mostrare che ($rg\,A = 3$) ha soluzioni dipendenti da parametro della forma

$$\begin{cases} x = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -t \\ y = \begin{vmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -t \\ z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = t \\ w = t \end{cases}$$

In verde la soluzione dell'esercizio

Osservare che le soluzioni

$$(x, y, z, w) = (3-t, -t, 2+t, t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

del sistema completo sono la somma delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$(-t, -t, t, t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

e di una soluzione particolare del sistema completo

$$(3, 0, 2, 0)$$

(ottenuta per $t=0$)

Un sistema dipendente da parametro k EDUCATIVO.

Stabilire per quali valori reali di k è risolubile (e in tali casi risolvere) il sistema

$$\begin{cases} kx \quad\quad - z + (k+1)w = 1 \\ 2x - 3y + kz + 4w = 2 \\ \quad\quad y - z \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Sol. Matrici associate: $A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 & k+1 \\ 2 & -3 & k & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} k & 0 & -1 & k+1 & 1 \\ 2 & -3 & k & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

① Ricerca di rg A

Affermato che rg $A \geq 2$ per ogni k poiché contiene almeno 1 matrice quadrata di ordine 2 con det $\neq 0$) (ad es. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ma anche $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & k \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ per ogni k) conviene partire con la ricerca del determinante di una matrice 3x3 che contenga k su 1 sola riga (o una sola colonna) in modo da risolvere un'eq. lineare ($\rightarrow$ 1 sol valore di k da controllare). Risponde allo scopo:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k+1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(4k - 2k - 2) = -2(k-1) = 0 \quad \text{per } k = 1$$

$\Rightarrow$ se $k \neq 1$ rg $A = 3$ (e rg$(A|\underline{b}) = 3$ poiché contiene questa sottomatrice)

$\Rightarrow$ Sistema risolubile con dipendenza da una variabile (4 incognite − valore del rango = 1)

Se $k = 1$ $(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Se si orla $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

con la 3ª colonna invece della quarta si ha $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ rg $A = 2$ perché i 2 possibili modi di orlare $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ danno ENTRAMBI det $= 0$. D'altra parte $\underline{b}$ coincide con la 1ª colonna di A e quindi orlando $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\underline{b}$ si ha ancora un determinante nullo $\Rightarrow$ rg$(A|\underline{b}) = 2$ sistema risolubile, dipendente da 2 variabili.

Questo risultato poteva essere ottenuto anche risolvendo direttamente con il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{la 1a alla 2a riga}]{\text{sottraggo 2 volte}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{divido per } -3 \text{ la 2a e la sottraggo alla 3a riga}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ questa matrice ha rango 2!

inoltre proseguendo si trova $\begin{cases} y = z \\ x = 1 + z - 2w \end{cases} \Rightarrow$ sol: $\begin{cases} x = 1 + s - 2t \\ y = s \\ z = s \\ w = t \end{cases}$

II Volendo risolvere il sistema per $k \neq 1$ si può procedere in molti modi.

1 Generalizzazione di Cramer

Ricordo che la matrice 3x3 il cui det. è $\neq 0$ perché $k \neq 1$ è formata con la 1a, 2a, 4a colonna. Riscrivo il sistema

$$\begin{cases} kx + (k+1)w = 1 + t \\ 2x - 3y + 4w = 2 - kt \\ y = t \\ [\, z = t \,] \end{cases}$$

e risolvo il sistema delle prime 3 eq. con il metodo di Cramer

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 1+t & 0 & k+1 \\ 2-kt & -3 & 4 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2(1-k)}, t, t, \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & 1+t \\ 2 & -3 & 2-kt \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix}}{2(1-k)} \right) \text{ecc.}$$

2 metodo artistico

Visto che $y = z$ opero questa sostituzione nel sistema e risolvo il sistema 2x3:

$$\begin{cases} kx - y + (k+1)w = 1 \\ 2x + (k-3)y + 4w = 2 \end{cases}$$

Attenzione: se per la soluzione a questo punto si usa il metodo di Cramer bisogna essere certi che il det. della matrice 2x2 evidenziata si annulli solo per $k=1$ (altrimenti si devono isolare altri sottocasi). Ora

$$\begin{vmatrix} k & -1 \\ 2 & k-3 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2)$$ non si annulla solo per $k=1$

mentre $\begin{vmatrix} k & k+1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(k-1)$ sì. Quindi risolvo $\begin{cases} kx + (k+1)w = 1 + y \\ 2x + 4w = 2 + (3-k)y \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+y & k+1 \\ 2-(k-3)y & 4 \end{vmatrix}}{2(k-1)} = 1 + \frac{k-1}{2} y \qquad w = \frac{\begin{vmatrix} k & 1+y \\ 2 & 2+(3-k)y \end{vmatrix}}{2(k-1)} = 1 - \frac{k-2}{2} y$$

$$\Rightarrow (x, y, z, w) = \left(1 + \frac{k-1}{2} t, t, t, 1 - \frac{k-2}{2} t\right)$$

(3) Metodo di Gauss-Jordan

Dipendendo la matrice da parametro, bisogna stare molto attenti a quel che si fa, per non rischiare di dividere per quantità che per qualche valore di k $(\neq 1)$ si possano annullare.
In quanto segue teniamo conto che il sistema non cambia se permutiamo le equazioni (ordine delle righe di $(A|\underline{b})$) e anche le incognite ... pur di tenerne conto. Invece di scrivere la matrice nella forma solita $(A|\underline{b})$ scriveremo una tabella in cui la 1ª riga ricorda sempre l'ordine con cui vengono prese le incognite. Quindi scriverò (l'ultima colonna è quella dei termini noti)

$$(A|\underline{b}) = \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline k & 0 & -1 & k+1 & 1 \\ 2 & -3 & k & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

porto la 3ª riga in 1ª posizione (voglio sfruttare il fatto che $y=z$)

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -1 & k+1 & 1 \\ 2 & -3 & k & 4 & 2 \end{array}$$

Non posso scegliere 0 come pivot: quindi porto la 1ª colonna in ultima posizione

$$\begin{array}{cccc|c} y & z & w & x & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k & 1 \\ -3 & k & 4 & 2 & 2 \end{array}$$

Sommo 3 volte la 1ª alla 3ª riga

$$\begin{array}{cccc|c} y & z & w & x & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k & 1 \\ 0 & k-3 & 4 & 2 & 2 \end{array}$$

Sommo $(k-3)$ volte la 2ª riga alla 3ª

$$\begin{array}{cccc|c} y & z & w & x & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 4+(k-3)(k+1) & 2+k(k-3) & 2+k-3 \end{array}$$

osservo che $4+(k-3)(k+1) = (k-1)^2$
$2+k(k-3) = (k-1)(k-2)$
$2+k-3 = k-1$
Se $k=1$ l'ultima riga è tutta di zeri e ci si riconduce al caso già studiato. Altrimenti divido la 3ª riga per $(k-1)^2$ e moltiplico la 2ª per (-1).

$$\begin{array}{cccc|c} y & z & w & x & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(k+1) & -k & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{k-2}{k-1} & \frac{1}{k-1} \end{array}$$

Sommo $(k+1)$ volte la 3ª riga alla 2ª

$$\begin{array}{cccc|c} y & z & w & x & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -k+(k+1)\frac{k-2}{k-1} & -1+\frac{k+1}{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{k-2}{k-1} & \frac{1}{k-1} \end{array}$$

osservo che $-k+(k+1)\frac{k-2}{k-1} = \frac{-2}{k-1}$ e
$-1+\frac{k+1}{k-1} = \frac{2}{k-1}$

e risolvo: $x=s$, $w = \frac{1}{k-1} - \frac{k-2}{k-1}s$, $z = \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k-1}s = y$. La quaterna trovata come soluzione $(x,y,z,w) = \left(s, \frac{2}{k-1}(1+s), \frac{2}{k-1}(1+s), \frac{1}{k-1}(1-(k-2)s)\right)$ è diversa dalla quaterna individuata con il metodo (2):

$$(x, y, z, w) = \left(-1 + \frac{k-1}{2}t, t, t, 1 - \frac{k-2}{2}t\right)$$

poiché nel caso (2) si è risolto pensando y come parametro, nel caso (3) pensando x come parametro.

In effetti lo svolgimento con il metodo di Gauss equivale ad aver visto che la matrice formata con le ultime 3 colonne ha determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & k+1 \\ -3 & k & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{doppio scambio}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k+1 \\ -3 & k & 4 \end{vmatrix} = -(k-1)^2$$

e a calcolare col metodo di Cramer applicato a questa matrice e al termine noto $(+1-kx, 2-2x, 0)$

$$(x, y, z, w) = \left(s, \frac{-1}{(k-1)^2}\begin{vmatrix} 1-ks & -1 & k+1 \\ 2-2s & k & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \frac{-1}{(k-1)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1-ks & k+1 \\ -3 & 2-2s & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \frac{-1}{(k-1)^2}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1-ks \\ -3 & k & 2-2s \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

D'altra parte, posto $-1 + \frac{k-1}{2}t = s$, si ricava $t = (s+1)\cdot\frac{2}{k-1}$, cioè i due parametri s e t si riconducono l'uno all'altro (e sostituendo ad es. $t = \frac{2(s+1)}{k-1}$ nella 4ª coordinata si ritrova la 4ª coordinata dell'altra soluzione:

$$1 - \frac{k-2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}(s+1)}{k-1} = \frac{1}{k-1}\left(\cancel{k}-1-\cancel{k}+2-(k-2)s\right)\ )$$

cioè abbiamo solo scritto le stesse soluzioni in due modi diversi.

AUTOVALORI e AUTOVETTORI DI UNA MATRICE

Le matrici $n \times n$ realizzano delle "trasformazioni" dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ in sé: $\underline{x}' = A\underline{x}$

ES. 1. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ realizza la rotazione di un angolo α in $\mathbb{R}^2$

Es. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ realizza una trasformazione che dilata di un fattore 2 nella direzione dell'asse x e di " " 3 " " " " y

Es 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ realizza la simmetria rispetto all'asse x

Es 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ realizza la simmetria rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante

Es 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ realizza la proiezione ortogonale sull'asse x.

Per altre matrici è meno facile descrivere l'azione geometrica corrispondente.
Utile in questo senso stabilire se ci sono direzioni "privilegiate" che vengono trasformate in se stesse applicando A.
È ciò che succede in Es 2., 3., 5. per le direzioni dell'asse x e y e in Es. 4 per le direzioni delle 2 bisettrici del 1°-3°, 2°-4° quadrante.

Questa condizione si traduce nella richiesta che esistano vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (\underline{0})$ e scalari $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x},$$

λ autovalore di A
x autovettore di A relativo a λ

cioè

$$A\underline{x} = (\lambda I)\underline{x}$$

(λI è la matrice diagonale con λ in ogni posizione)

cioè

$$(A-\lambda I)\underline{x} = \underline{0} \qquad (*)$$

Dunque il problema si riconduce a trovare dei valori λ tali che il sistema OMOGENEO (*) non abbia solo la soluzione nulla, bensì almeno una intera "direzione" di soluzioni

Ciò si realizza per

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

Equazione caratteristica di A: è polinomiale di grado n

Nel caso $n=2$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \det A.$$

ATTENZIONE: la ricerca di autovalori e autovettori ha soluzioni dipendenti dal campo numerico.

Ad es. se penso $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ come matrice a coefficienti reali, devo cercare $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ ... ed è chiaro che non li trovo, se $\alpha \neq 0, \pi$:

$$\lambda^2 - 2(\cos\alpha)\lambda + 1 = 0 \quad \text{ha} \quad \frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha - 1 \leq 0$$

Ma se penso A a coefficienti in $\mathbb{C}$, e posso quindi cercare $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\underline{x} \in \mathbb{C}^2$, le soluzioni ci sono:

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i \operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad (\cos\alpha - \cos\alpha \mp i\operatorname{sen}\alpha)x_1 - \operatorname{sen}\alpha\, x_2 = 0$$

$\Rightarrow \quad x_2 = \pm x_1 \cdot i \quad \Rightarrow$ autovettore di λ_1: (t, it)

λ_2: $(t, -it)$

Vediamo qualche esempio semplice

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 0 = 0$ per $\lambda = 0$, $\lambda = -3$

Ricerca autovettori:

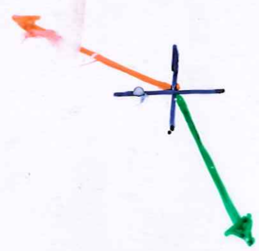
$(A - 0 \cdot I)\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ \boxed{-2x_1 - 4x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

equazione inutile
$rg(A - 0I) = 1$

Autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$: $\underline{x} = (-2t, t)$

$(A + 3I)\underline{x} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -3$: $\underline{x} = (t, -2t)$



N.B. Quando $\det A = 0$, l'autovalore 0 c'è sempre

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$

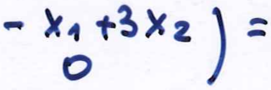
$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ per $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$

Se la matrice è triangolare gli autovalori si leggono direttamente sulla diagonale di A

Ricerca degli autovettori:

$\lambda = 1$: $(A - I)\underline{x} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ autovettori $(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$

$\lambda = 2$: $(A - 2I)\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ autovettori $(3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$



3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$

2 è un autovalore "doppio"

Autovettori corrispondenti: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $(t, 0)$ $t \in \mathbb{R}$

In questo caso ci sono <u>due</u> autovalori coincidenti e <u>una sola</u> direzione privilegiata indipendente.

Invece se parto da $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ci sono anche due direzioni privilegiate indipendenti.

$\hookrightarrow \infty$

Il numero di direzioni privilegiate indipendenti prodotte da un autovalore si chiama MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA dell'autovalore

Invece la sua molteplicità algebrica è la molteplicità dell'autovalore pensato come radice dell'equazione caratteristica.

Si dimostra

$$m.g. \leq m.a.$$

e se per ogni autovalore di A vale =

e la somma delle m.a. degli autovalori è $= n$

esiste una matrice invertibile U tale che

$$U^{-1} A U \text{ è diagonale}$$

e i suoi elementi non nulli sono gli autovalori (ciascuno presente con la sua m.a.)

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

equazione caratteristica: $(6-\lambda)\left((5-\lambda)^2 - 1\right) = 0$

$\Rightarrow$ autovalori $\lambda = 4$ e $\lambda = 6$ con molteplicità algebrica 2

A proposito della <u>diagonalizzabilità</u> della matrice A

Ragioniamo su una matrice A quadrata di ordine 2 per comodità espositiva.
Siano λ_1 e λ_2 due autovalori con $\lambda_1 \neq \lambda_2$
cioè esistono due vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ tali che:

$$A\underline{u}_1 = \lambda_1 \underline{u}_1 \qquad A\underline{u}_2 = \lambda_2 \underline{u}_2$$

si prova che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono <u>lin.</u> <u>indip.</u>

$$\Rightarrow \quad U = (\underline{u}_1 | \underline{u}_2) \quad \text{ha det.} \neq 0$$
$$\Rightarrow \exists\, U^{-1}$$

Allora da:

$$A(\underline{u}_1 | \underline{u}_2) = (\lambda_1 \underline{u}_1 | \lambda_2 \underline{u}_2)$$
$$= (\underline{u}_1 | \underline{u}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} u_{11} & u_{12} \\ \underline{u_{21}} & \underline{u_{22}} \end{array}\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}\lambda_1 & u_{12}\lambda_2 \\ u_{21}\lambda_1 & u_{22}\lambda_2 \end{pmatrix}$$

ricavo:

$$(\underline{u}_1 | \underline{u}_2)^{-1} A (\underline{u}_1 | \underline{u}_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Analogamente in dimensione n ogniqualvolta TUTTI gli autovalori di A hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica

V29.2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)\left[(5-\lambda)^2 - 1\right] =$$

$$= (6-\lambda)(5-\lambda-1)(5-\lambda+1) = 0$$

per $\boxed{\lambda = 6 \quad \lambda = 4 \quad \lambda = 6}$

$$= (6-\lambda)(25 - 10\lambda + \lambda^2 - 1) =$$

$$= \underbrace{6 \cdot 24}_{\boxed{\det A}} + \underbrace{(6\cdot(-10) - 24)}_{\boxed{-\left(\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\right)}}\lambda + \lambda^2 \underbrace{(6+10)}_{\boxed{6+5+5}} - \lambda^3$$

$\boxed{\lambda=6}$

$$\begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

posso scegliere tra le ∞ direz privilegiate quelle dei 2 vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda=4}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

V30.1

Autovettori relativi a $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -t \end{cases}$$

INUTILE

gli autovettori hanno la forma $(t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$

Autovettori relativi a $\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ 0 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

INUTILI: rango della matrice del sistema $= 1$

Gli autovettori hanno la forma $(t, s, t) = t(1,0,1) + s(0,1,0)$
Si vede che ci sono due direzioni privilegiate indipendenti, ad es. $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ ... corrispondenti ad avere 2 parametri nelle soluzioni.

Ora osservo che

$$\left.\begin{aligned} A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

In generale la matrice U si costruisce proprio accostando i vettori colonna corrispondenti agli autovettori indipendenti