2010 Si considerino

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 3k & -2 & k+1 \\ -k & -1 & 3 & 0 \\ 3k & 3 & -2k & 2 \end{pmatrix} \quad (3\times 4)$$

e il sistema omogeneo $A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) $\text{rg}\, A_k$?

2) ha soluz. $\forall k$? - Soluzioni $\forall k$ per cui è risolubile.

Metodo di Kronecker

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies 2 \leq \text{rg}\, A_k \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 3k & -2 & k+1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2k & 2 \end{vmatrix} = \text{sviluppo lungo } 2^a \text{ riga}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & k+1 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3k & k+1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 + 2k^2 + 2k + 18k - 9k - 9 =$$

$$= 2k^2 + 11k - 13 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 + 13 \cdot 8}}{4} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 104}}{4} = \frac{-11 \pm 15}{4} = 1, \; -\frac{13}{2}$$

$\implies$ se $k \neq 1, -\frac{13}{2}$ $\text{rg}\, A = 3$, certamente perché ho trovato sottom. 3×3 a det $\neq 0$

$$k=1 \quad , \quad k=-\frac{13}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & k+1 \\ \boxed{-k \quad 3 \quad 0} \\ 3k & -2k & 2 \end{vmatrix} = +k \begin{vmatrix} -2 & k+1 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & k+1 \\ 3k & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4k + 2k^3 + 2k^2 + 12 - 9k^2 - 9k$$

Sostituisco $k=1$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\det A'_1 = -\cancel{4} + \cancel{2} + \cancel{2} + 12 - 9 - 9 \neq 0 \implies rg\, A_1 = 3$

Sostituisco $k = -\frac{13}{2}$

$$\det A'_{-\frac{13}{2}} = +26 - \cancel{2} \cdot \frac{13^3}{\cancel{8}\,4} + \frac{13^2}{2} + 12 - 9\left(-\frac{13}{2}-1\right)\left(\frac{13}{2}\right)$$

$$= 38 + \frac{-13^3 + 2\cdot 13^2 - 9\cdot 13^2 - 18\cdot 13}{4} =$$

$$= 38 + \frac{13^2(-13+2-9) - 18\cdot 13}{4} =$$

$$= 38 - 13^2\cdot 5 - \frac{9}{2}\cdot 13 \neq 0$$

$\implies$ anche per $k = -\frac{13}{2}$: $rg\, A_{-\frac{13}{2}} = 3$

---

2) Si: ha soluz. $\forall k$: tutte queste dipendono da 1 parametro

$$A = (\underline{a}_1 \mid \underbrace{\underline{a}_2 \mid \underline{a}_3 \mid \underline{a}_4})$$

per $k \neq 1, -\frac{13}{2}$ $\det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4) \neq 0$

se $k=1, -\frac{13}{2}$ $\det(\underline{a}_1 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4) \neq 0$

Nel I caso il sistema $\qquad \underline{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$x\,\underline{a}_1 + y\,\underline{a}_2 + z\,\underline{a}_3 + w\,\underline{a}_4 = \underline{0}$$

vado a riscriverlo

$$y\,\underline{a}_2 + z\,\underline{a}_3 + w\,\underline{a}_4 = -x\,\underline{a}_1 \quad \text{Termine noto}$$

Cramer:

$$\begin{cases} x = t \\[2mm] y = \dfrac{\det(-t\,\underline{a}_1 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4)}{\det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4)} = -t\,\dfrac{\det(\underline{a}_1 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4)}{\det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4)} \\[4mm] z = \dfrac{\det(\underline{a}_2 | -t\,\underline{a}_1 | \underline{a}_4)}{\det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4)} = \dots \\[4mm] w = \dfrac{\det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | -t\,\underline{a}_1)}{\det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4)} = \dots \end{cases}$$

$$t = s \cdot \det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = s\det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4) \\ y = -s\det(\underline{a}_1 | \underline{a}_3 | \underline{a}_4) \\ z = +s\det(\underline{a}_1 | \underline{a}_2 | \underline{a}_4) \\ w = -s\det(\underline{a}_2 | \underline{a}_3 | +\underline{a}_1) = \\ \quad = -s\det(\underline{a}_1 | \underline{a}_2 | \underline{a}_3) \end{cases}$$

proprietà dei determinanti!

24/2/2011

In dipendenza da k calcolare il rg AB ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4k \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4k \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 3+0+3 \\ 2+2k+0 & 6-4k^2-3 \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{2\times 3 \qquad 3\times 2}_{2\times 2} \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2+2k & 3-4k^2 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = 3-4k^2-12-12k = -4k^2-12k-9 =$$
$$= -(2k+3)^2 = 0$$
$$\iff k = -3/2$$

Quindi se $k \neq -3/2$ $\quad rg(AB) = 2$

se $k = -3/2$ $\quad rg(AB) = 1$

poiché AB contiene elementi $\neq 0$ (ad es. in posizione $(1,1)$).

10/2/2011

Stabilire se $A = k \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile: in caso affermativo trovare A^{-1}, in caso negativo trovare $\operatorname{rg} A$.

Se $k=0$ A è la matrice nulla che ha $\operatorname{rg}=0$;

se $k\neq 0$: calcolo

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \det A = 8k^3 \neq 0$$

$A = kB$: $A^{-1} = k^{-1} B^{-1}$ è vero? PROVA

$$A^{-1} A = k^{-1} B^{-1} k B = (k^{-1} k) B^{-1} B = 1 \cdot I = I$$

Calcolo B^{-1} col metodo di Gauss

$$(B \mid I) \rightsquigarrow (I \mid B^{-1})$$

Alla fine controllare che $B^{-1} B = I$

9/2/2010

In R^3 sono dati $\underline{u} = (k, -2, 1)$
$\underline{v} = (-2, k+3, -2)$
$\underline{w} = (-1, 2, -k)$

stabilire in dipendenza da k quando sono indipendenti e se non sono indip. quanti di essi lo sono.

Costruisco la matrice ottenuta accostando i 3 vettori

$$\begin{pmatrix} k & -2 & -1 \\ -2 & k+3 & 2 \\ 1 & -2 & -k \end{pmatrix}$$

e mi chiedo che rango ha: se è 3: sono indip. se è <3 no e so quanti sono indipendenti.

$$\begin{vmatrix} k & -2 & -1 \\ -2 & k+3 & 2 \\ 1 & -2 & -k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k+3 & 2 \\ -2 & -k \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & k+3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= k(-k^2 - 3k + 4) + 2(2k-2) - (4 - k - 3) =$$

$$\begin{aligned} = -k^3 - 3k^2 &+ 4k \\ &+ 4k - 4 \\ &+ k - 1 \end{aligned}$$

$$\overline{-k^3 - 3k^2 + 9k - 5}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & -3 & 9 & -5 \\
1 & & -1 & -4 & 5 \\
\hline
 & -1 & -4 & 5 & 0
\end{array}
$$

$$\det A = -(k-1)(+k^2+4k-5) = -(k-1)^2(k+5) = 0$$

per $k=1$ e per $k=-5$

Se $k \neq 1$ e $\neq -5$ i 3 vettori sono indip.

Se $k=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rg = 1 \Rightarrow 1 \text{ solo vett. indip.}$$

Se $k=-5$

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow rg = 2 \Rightarrow$$

le coppie di vettori $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ $\{\underline{u}, \underline{w}\}$ sono indip.

Compito: Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ sono indipendenti i vettori di $\mathbb{R}^4$:

$\underline{u} = (1, 0, 1, 1)$

$\underline{v} = (1, -k, k, 1)$

$\underline{w} = (0, k+2, -2, k+1)$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & -k & k+2 \\ 1 & \boxed{k} & \boxed{-2} \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$rg\,A_k$?

$0 < rg\,A_k \leq 3$

$2 \leq$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -2 \\ 1 & 1 & k+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -2 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-1) = 0$$

per $k = \pm 1$

$\Rightarrow$ se $k \neq \pm 1$ $rg\,A_k = 3$ $\Rightarrow$ vett. indip. sono 3

se $k = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\,A_1 = 3$$

3 vett. indip.

se $k = -1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Metodo di Kronecker: visto che entrambe le matrici 3×3 che si ottengono orlando $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -2 \end{pmatrix}$ hanno det $= 0$, il rg di A_{-1} è 2. $\Rightarrow$ 2 soli vettori indip.

Trovare autovalori e autovettori di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

trovare λ e $(x,y,z) \neq \underline{0}$ t.c. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 $\hookrightarrow$ per quali λ : $\det(A - \lambda I) = 0$?

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)(-2-\lambda)+1\right) + 1 =$$

$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda) + 2 - \lambda =$$

$$= -2 + 4\lambda - 2\lambda^2 +$$

$$-\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 +$$

$$+2 - \lambda =$$

$$= 2\lambda - \lambda^3 = \lambda(2-\lambda^2)$$

$\lambda = 0$, $\lambda = \sqrt{2}$, $\lambda = -\sqrt{2}$ 3 autovalori distinti

se $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ \cancel{x-y-2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \text{autovettori corrisp. a } \lambda = 0$$

$$\underline{v}_0 = (-t, t, -t) \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\lambda = \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ (1-\sqrt{2})y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= t \\ y &= (\sqrt{2}-1)t \\ z &= (\sqrt{2}-1)^2 t \end{aligned}$$

autovettore relativi a $\lambda = \sqrt{2}$: $\underline{v}_{\sqrt{2}} = (t, (\sqrt{2}-1)t, (\sqrt{2}-1)^2 t)$
$t \in \mathbb{R}$

$\lambda = -\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ (1+\sqrt{2})y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= t \\ y &= -(1+\sqrt{2})t \\ z &= +(1+\sqrt{2})^2 t \end{aligned}$$

autovettori relativi a $\lambda = -\sqrt{2}$:

$$\underline{v}_{-\sqrt{2}} = (t, -(1+\sqrt{2})t, (1+\sqrt{2})^2 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$\underline{v}_{-\sqrt{2}}$, $\underline{v}_{\sqrt{2}} = (t, (\sqrt{2}-1)t, (\sqrt{2}-1)^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$

e $\underline{v}_0 = (-t, t, -t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

sono indipendenti