Stabilire se la funzione

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x^3}\left(\sqrt{1+2x^2}+\ln(1+x)-e^x\right) & \text{se } x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x=0 \end{cases}$$

è continua in $x=0$. In caso affermativo si stabilisca se in $x=0$ è anche derivabile.

SVOLGIMENTO

$f(x)$ è cont. in $x=0 \iff \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$

$f(x)$ è derivabile in $x=0$ (posto che abbiamo già verificato che è continua) se esiste finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

se esiste è la derivata di f in 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3}\left(\sqrt{1+2x^2}+\ln(1+x)-e^x\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)t^2+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{-3}{2\cdot 3}\right)t^3+o(t^3)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4$$

$$+\dots+\underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}}_{=\binom{\alpha}{n}}t^n+o(t^n)$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) \qquad t = 2x^2$$

$$\sqrt{1+2x^2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2x^2 - \frac{1}{8}(2x^2)^2 + \frac{1}{16}(2x^2)^3 + o(x^6) =$$

$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$$

$$= 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3}\left(\sqrt{1+2x^2} + \ln(1+x) - e^x\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3}\left(\cancel{1} + x^2 + \underline{o(x^2)} + \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3}\cdot o(x^2)$$: DEVO SVILUPPARE DI PIÙ

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3}\left(-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4) + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3}\left(-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4) + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

Per $x \to 0$ $x^4 = o(x^3)$ poiché $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} x = 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3}\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{6} + o(1)\right) = \frac{1}{2}$$

La funz. $f(x)$ è continua in $x=0$

limite rapp incr.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{3\left(\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x^3+o(x^3)-x^3}{2x^3\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{2x^4}=$$ non basta.

sviluppo di più

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{3}{x^3}\left(\cancel{1}+\cancel{x^2}-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)+\cancel{x}-\frac{\cancel{x^2}}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)+\right.\right.$$
$$\left.\left.-\cancel{1}-\cancel{x}-\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{2!}}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{3}{x^3}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{19}{24}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{19}{8}x+o(x)-\cancel{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{19}{8}$$

il limite del rapp. increm. esiste finito

$\Longrightarrow$ $f(x)$ è derivabile in $x=0$ e

$$f'(0)=-\frac{19}{8}.$$

25/11/2008

$y' = y\,(\ln t) + t$

a) Si riconosca. b) Si mostri che il problema di Cauchy $y(1)=0$ è risolubile. c) Della soluzione si trovi il polinomio di Taylor di 3° grado con punto iniziale $t=1$.

a) eq diff: 1° ordine. lineare completa

$$(*) \quad y' - (\ln t)\, y = t$$

b) $F(t,y) = y(\ln t) + t$ è definita per

$$(t,y) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$$

e nello stesso semipiano è continua.

$(1,0) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ teor di Cauchy: esiste 1 e 1 sola soluz. dell'eq. $(*)$ t.c. $\bar{y}(1)=0$.

c) $y'(t) = y(t)\cdot\ln t + t$

$y''(t) = y'(t)\cdot\ln t + y(t)\cdot\frac{1}{t} + 1$

$$y'''(t) = y''(t)\ln t + y'(t)\cdot\frac{1}{t} + y'(t)\cdot\frac{1}{t} + y(t)\cdot\frac{(-1)}{t^2} =$$

$$= y''(t)\ln t + \frac{2}{t}y'(t) - \frac{1}{t^2}y(t)$$

$$y(t) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(t-1) + \frac{y''(1)}{2!}(t-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(t-1)^3 + o\left((t-1)^3\right)$$

So che $y(1)=0$

$y'(1) = y(1) \cdot \ln 1 + 1 = 1$

$y''(1) = 1 \cdot \ln 1 + 0 \cdot \frac{1}{1} + 1 = 1$

$y'''(1) = \underbrace{1 \cdot \ln 1}_{0} + \frac{2}{1} \cdot 1 - \underbrace{\frac{1}{1} \cdot 0}_{0} = 2$

$\Longrightarrow y(1+h) = 0 + \frac{1}{1} h + \frac{1}{2!} h^2 + \frac{2}{3!} h^3 + o(h^3)$ cioè

$y(t) = (t-1) + \frac{1}{2} (t-1)^2 + \frac{1}{3} (t-1)^3 + o((t-1)^3)$

26/1/2005

$f(x,y) = (2y + x^2)(y - x)$

a) Dove sono continue $f(x,y)$ e le sue derivate parziali prime e seconde?

Su $\mathbb{R}^2$ perché sono tutti polinomi

b) Det. l'eq. del piano tangente al grafico in $P = (-1, 2, f(-1,2))$

$z - f(-1,2) = f_x(-1,2)(x+1) + f_y(-1,2)(y-2)$

$f(-1,2) = (4+1)(2+1) = 15$

$f_x = 2x(y-x) + (2y+x^2)(-1)$ $\quad f_x(-1,2) = -2 \cdot 3 + (-5) = -11$

$f_y = 2(y-x) + (2y+x^2)(1)$ $\quad f_y(-1,2) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$

eq. del piano tangente:

$z - 15 = -11(x+1) + 11(y-2)$

c) Si determinino i punti critici stabilendo di che tipo sono

$$f_x = -3x^2 + 2xy - 2y$$

$$f_y = x^2 - 2x + 4y$$

1. $\text{grad} f = (0,0) \Longrightarrow$ punti critici

$$\begin{cases} -3x^2 + 2xy - 2y = 0 \\ x^2 - 2x + 4y = 0 \end{cases}$$ per sostituzione

$$\begin{cases} -3x^2 + \cancel{(2x-2)}^{\,x-1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}\,2}(2x - x^2) = 0 \\ y = \frac{1}{4}(2x - x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left((x-1)\left(1 - \frac{1}{2}x\right) - 3x\right) = 0 \\ y = \frac{1}{4}(2x - x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) = 0 \\ y = \frac{1}{4}(2x - x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2 + 3x + 2) = 0 \\ y = \frac{1}{4}(2x - x^2) \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -1 \end{matrix}$$

$$A = (0,0), \quad \left(-2, \tfrac{1}{4}(-4-4)\right), \quad \left(-1, \tfrac{1}{4}(-2-1)\right)$$

$$B = (-2, -2) \qquad C = \left(-1, -\tfrac{3}{4}\right)$$

sono i 3 punti critici

$f_{xx} = -6x + 2y$ $\qquad$ $f_{xy} = 2x - 2$

$f_{yx} = 2x - 2$ $\qquad$ $f_{yy} = 4$

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} -6x + 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} -3x+y & x-1 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\left(2(y-3x) - (x-1)^2 \right)$$

$A = (0,0)$ $\qquad$ $\mathcal{H}(0,0) = -4 < 0$

$(0,0)$: punto di SELLA

$B = (-2,-2)$ $\qquad$ $\mathcal{H}(-2,-2) = 4\left(2(-2+6) - 9\right) =$

$= 4(8-9) < 0$

$(-2,-2)$: punto di sella

$C = (-1, -\frac{3}{4})$ $\qquad$ $\mathcal{H}(-1, -3/4) = 4\left(2\left(-\frac{3}{4}+3\right) - (4)\right) =$

$= 4\left(\frac{9}{2} - 4\right) = 2 > 0$

$(-1, -\frac{3}{4})$ è un estremante locale

$f_{yy} = 4 > 0 \Rightarrow$ minimo locale.

$$f(x,y) = x^4 + x^3 y + y^4 - y$$

Det. punti critici e studiarli

$$f_x = 4x^3 + 3x^2 y = x^2(4x + 3y)$$

$$f_y = x^3 + 4y^3 - 1$$

$$\begin{cases} x^2(4x+3y) = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y^3 = \frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y \\ -\left(\frac{3}{4}y\right)^3 + 4y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$A = \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \qquad \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y \\ \left(4 - \frac{27}{64}\right) y^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{4}{\sqrt[3]{229}}$$

$$H = \begin{vmatrix} \underbrace{12x^2 + 6xy}_{6x(2x+y)} & 3x^2 \\ 3x^2 & 12y^2 \end{vmatrix} = 9x \begin{vmatrix} 3(2x+y) & x \\ x & 4y^2 \end{vmatrix}$$

Studiare per esercizio $H\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{229}}, \frac{4}{\sqrt[3]{229}}\right)$

$H(A) = 0$ Studio l'andamento in un intorno di A abbastanza piccolo se i valori non sono tutti $< f(A)$ o tutti $> f(A)$ allora certamente A non è un estremante locale

$$f\left(h, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = h^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} h^3 + \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} =$$

$$= h^3\left(h + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) + \frac{-3}{4\sqrt[3]{4}} =$$

$$= h^3\left(h + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) + f\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$$

se $h > 0$ $\quad h^3 > 0$, $\left(h + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) > 0 \Rightarrow f\left(h, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) > f\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

se $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < h < 0$, $h^3 < 0$, $\left(h + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) > 0 \Rightarrow f\left(h, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) < f\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

$\Rightarrow$ A è un punto di sella