$$y'' - y = x e^x$$

1°) Omog. assoc. : $z'' - z = 0$

eq. caratteristica : $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$

soluz. dell'omog. associata $z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2°) Soluzione particolare

se esiste una della forma $\bar{y}(x) = k x e^x$?

$\bar{y}'(x) = k(1+x)e^x \qquad \bar{y}''(x) = k(2+x)e^x$

sostituisco : $k e^x (2 + x - x) = x e^x \iff 2k = x$: non è una identità in x per alcun valore di $k \Rightarrow$ NO

Non basta neanche elevare di 1 il grado del monomio

Ma se pongo

$$\bar{y}(x) = (ax^2 + bx)e^x$$
$$\bar{y}'(x) = (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x$$
$$\bar{y}''(x) = (ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b))e^x$$

e sostituisco:

$$e^x(ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b) - ax^2 - bx) = xe^x$$

implica

$$4ax + 2(a+b) = x$$

cioè

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, \ b = -\frac{1}{4}$$

Sol. part. $\bar{y}(x) = \frac{1}{4} e^x (x^2 - x)$

3°) Integrale generale: $y(x) = \frac{1}{4} e^x (x^2 - x) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

Qui le cose sono andate male perché l'esponente ha coefficiente $1 \neq \frac{r_1 + r_2}{2} = 0$ ma bene perché lo stesso esponente è soluzione dell'equazione caratteristica.

In generale però conviene cercare il polinomio per cui moltiplicare l'esponenziale $e^{\lambda x}$ che compare nel termine noto senza specificare il grado :

$$\bar{y}(x) = p(x) e^{\lambda x}$$
$$\bar{y}'(x) = (\lambda p(x) + p'(x))e^{\lambda x}$$
$$\bar{y}''(x) = (\lambda^2 p(x) + 2\lambda p'(x) + p''(x))$$

e ricondursi ad un'eq. differenziale di 2° ordine lineare omogenea in p, p', p'' con termine noto polinomiale.

$y'' - (h+k)y' + hky = \mu x e^{\lambda x}$

Soluzioni dell'omogenea associata: $z(x) = c_1 e^{hx} + c_2 e^{kx}$ se $h \neq k$
$z(x) = c_1 e^{hx} + c_2 x e^{hx}$ se $h = k$

Cerco una soluzione $\bar{y}(x) = p(x) e^{\lambda x}$

$\bar{y}'(x) = (\lambda p(x) + p'(x)) e^{\lambda x}$

$\bar{y}''(x) = (\lambda^2 p(x) + 2\lambda p'(x) + p''(x))$

Sostituendo:

$$e^{\lambda x}\left(p''(x) + p'(x)(2\lambda - (h+k)) + p(x)(\lambda^2 - (h+k)\lambda + hk)\right) = \mu x e^{\lambda x}$$

che diventa

$$p'' + (2\lambda - (h+k))p' + (\lambda^2 - (h+k)\lambda + hk)p = \mu x$$

A) se λ non è soluzione dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - (h+k)r + hk = 0$$

(cioè $\lambda \neq h, k$) basta prendere $p(x) = ax + b$, $p'(x) = a$, $p'' = 0$:

$$\begin{cases} a(2\lambda - (h+k)) + b(\lambda^2 - (h+k)\lambda + hk) = 0 \\ a = \dfrac{\mu}{\lambda^2 - (h+k)\lambda + hk} \end{cases}$$

B) se lo è, cioè l'eq. si presenta come $p'' + (2\lambda - (h+k))p' = \mu x$ ma $2\lambda - (h+k) \neq 0$, basta prendere $p(x) = ax^2 + bx$ (inutile il termine noto poiché $c e^{\lambda x}$ è soluzione dell'omogenea) $\Rightarrow p'(x) = 2ax + b$, $p'' = 2a$ e quindi

$$2a + (2\lambda - (h+k))(2ax + b) = \mu x \iff \begin{cases} a = \dfrac{\mu}{2a(2\lambda - (h+k))} \\ 2a + b(2\lambda - (h+k)) = 0 \end{cases}$$

C) se anche $2\lambda - (h+k) = 0$ significa che $h = k$

In questo caso basta prendere $p(x) = ax^3 + bx^2$ (inutile prendere il termine lineare e quello costante poiché $c_1 e^{hx} + c_2 x e^{hx}$ è soluzione dell'omogenea associata) $\Rightarrow p' = 3ax^2 + 2bx$ $p'' = 6ax + 2b$

e sostituendo

$$6ax + 2b = \mu x$$

$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{\mu}{6} \end{cases} \qquad \text{cioè } p(x) = \frac{\mu}{6} x^3.$$

Risolvere: $y'' - 5y' + 6y = xe^x$; $y'' - 2y' + y = xe^x$;

$y'' - 6y' + 5y = xe^{2x}$; $y'' - 4y' + 3y = xe^{3x}$.