NUMERI ... quali ?

NATURALI : $(\mathbb{N}, +, \cdot) = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$
con le operazioni di somma e prodotto

$\supseteq$

INTERI NON NEGATIVI: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

opposto di un numero?

$\cap$

INTERI (relativi): $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots\}$

$\subseteq$

inverso di un numero?

RAZIONALI POSITIVI : $\mathbb{Q}^{>0} = \{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \dots, \frac{p}{q}, \dots\}$
con $p, q \in \mathbb{N}$ e
$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \overset{}{\Longleftrightarrow}_{DF} pq' = p'q$

$\subseteq$

inverso di un numero non nullo?

$\supseteq$

RAZIONALI (relativi): $\mathbb{Q} = \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \dots, \pm \frac{p}{q}, \dots\}$
con $p, q \in \mathbb{N}$ e la regola di identificazione vista sopra.

VEDI PAGINA DI COMMENTO RO.1 sui valori "assoluti"

SIMBOLOGIA

$X \subseteq Y$: l'insieme X è contenuto in Y (cioè tutti gli elementi di X sono anche elementi di Y).

$x \in X$: l'elemento x appartiene ad X (cioè sta in X)

$X \cup Y$: insieme unione di X e Y (insieme degli elementi che stanno in X o in Y)

$\Longleftrightarrow$: "se e solo se"

$X \cap Y$ = intersezione

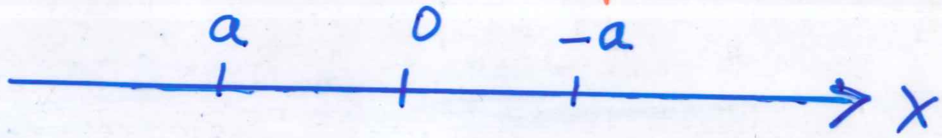
VEDI ESERC. pag RO.2-RO.3 sull'uso di $\cup$ e $\cap$

VALORE ASSOLUTO

numero a : intero relativo $a \in \mathbb{Z}$
o razionale relativo $a \in \mathbb{Q}$
o reale relativo $a \in \mathbb{R}$
come si preferisce.

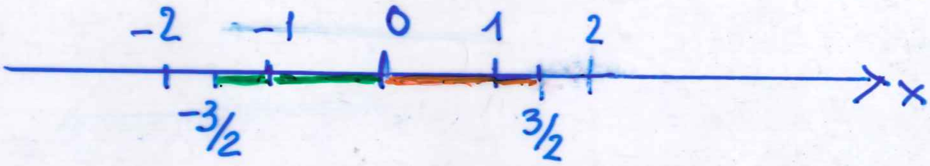
$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

ILLUSTRAZIONE



SI LEGGE: SEESOLOSE

$$|a| \geq 0 \quad \text{e} \quad |a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$$



$$\left| -\frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

$|a|$ rappresenta la distanza del punto di ascissa a sulla retta orientata dall'origine

$$|a| = 2 \Longrightarrow a = \pm 2$$

SI LEGGE: IMPLICA... (ciò che sta a DESTRA E' CONSEGUENZA FORZATA di ciò che sta a SIN.)

HP. $\Longrightarrow$ TS.

$$\sqrt{x^2-2x} \geq 2x+1$$

$\boxed{I.D.}$: è dato dalla intersezione dell'I.D. di $\sqrt{x^2-2x}$ e di quello di $2x+1$
$\forall x \in \mathbb{R}$

il radicando deve essere nonnegativo

$x^2-2x \geq 0 \iff x(x-2) \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$

$\iff x \leq 0 \quad x \geq 2$

Quindi l'intersezione dei due I.D. è $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ o } x \geq 2\}$

Nell' I.D. può succedere

a) $2x+1 \leq 0 \iff x \leq -\frac{1}{2}$

b) $2x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$ cioè

$-\frac{1}{2} < x \leq 0$ oppure $x \geq 2$

Nel caso a)

$\sqrt{x^2-2x} \geq 0 \geq 2x+1$ la disug. vale

Nel caso b)

tanto $\sqrt{x^2-2x}$ che $2x+1$ sono NON negativi

ALLORA POSSO ELEVARE AL QUADRATO ENTRAMBI I MEMBRI :

in nessun altro caso potrei farlo!

La graffa indica ∩ delle soluz. delle 2 disug.

$$\begin{cases} x^2-2x \geq (2x+1)^2 \\ -\frac{1}{2} < x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2+6x+1 \leq 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

$3x^2+6x+1=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}$ e quindi il sistema diventa

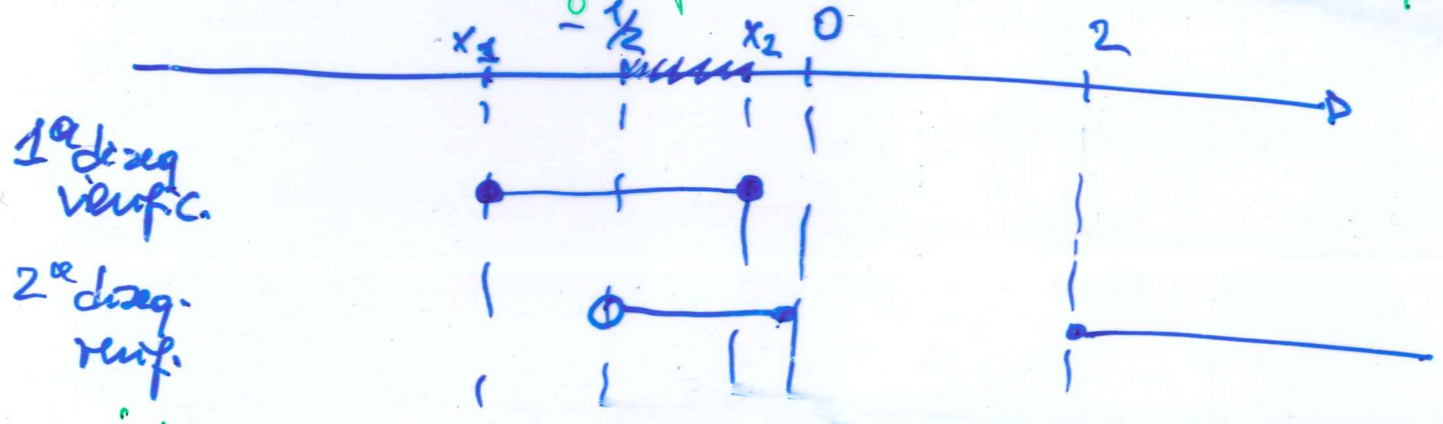
$$\begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{6}}{3} \le x \le \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3} \\[2ex] -\dfrac{1}{2} < x \le 0 \quad \text{oppure} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

ora devo intersecare

osservo che $x_1 < -1/2$ mentre

$x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3} = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ è <0 ma $> -\frac{1}{2}$ poiché $\frac{\sqrt{6}}{3} > \frac{2}{3}$

Trascrivo in un grafico le sol. delle 2 diseq.:



e interseco. La soluzione del sistema è $-1/2 < x \le x_2$

Tengo conto che nel caso (A) è soluz. l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -\frac{1}{2}\}$, nel caso (B) lo è $\{x \in \mathbb{R} \mid -1/2 < x \le x_2\}$ e unendo i due casi ho che la sol. della dis. irraz. è $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le x_2\}$

Il ragionamento fatto sopra è riassunto dalla "regola":

$$\sqrt{A(x)} \ge B(x)$$

$$\Updownarrow$$

CASO A $\quad \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) \ge (B(x))^2 \ (\ge 0) \end{cases}$ CASO B

Si legge "devi unire le soluzioni dei 2 sistemi"

Sol. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\}$

Sol: $\{x \in \mathbb{R} \mid -1/2 \le x \le x_2\}$

E unendo: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le x_2\}$

PROPRIETA' DEI RAZIONALI: $\mathbb{Q}$

ALGEBRICHE:

in $\mathbb{Q}$ sono definite due operazioni: $+, \cdot$
con le seguenti proprietà:

A0	$\forall a,b \in \mathbb{Q}: \quad a+b \in \mathbb{Q}$	$a \cdot b \in \mathbb{Q}$ M0
A1	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$ M1
A2	$\forall a,b,c \in \mathbb{Q}: \ (a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ M2
A3	$\exists z, u \in \mathbb{Q}: \forall a \in \mathbb{Q} \quad a+z=a$	$a \cdot u = a$ M3
	z: zero $\ 0$	u: unità $\ 1$
A4	$\forall a \in \mathbb{Q} \ \exists \bar{a} \in \mathbb{Q}: a+\bar{a}=z$	
	$\bar{a}$: opposto di a	$-a$
	$\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \ \exists a' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}:$	$a \cdot a' = u$ M4
		a': reciproco di a $\quad \frac{1}{a}, a^{-1}$

D $\quad \forall a,b,c \in \mathbb{Q}: \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$\Downarrow$

$\forall a,b \in \mathbb{Q}: \quad 0 \cdot b = 0$ LEGGE di ASSORBIMENTO

$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ verifica a pag R1.1

$(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$

CONSEGUENZA DELL'ESISTENZA DEL RECIPROCO:

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

$$a \cdot b = 0 \ \text{ e } \ a \neq 0 \implies b = 0$$

VERIFICA a pag R1.1

Come sommo 2 numeri razionali?

$$\frac{3}{7} + \left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{3\cdot 15}{7\cdot 15} + \left(-\frac{7}{15\cdot 7}\right) =$$

$$= \frac{3\cdot 15 - 7}{7\cdot 15} = \ldots$$

Come verifico la legge di assorbimento?

$$a\cdot b = (a+0)\, b = ab + 0\cdot b$$

$$a\cdot b - a\cdot b = ab + 0\cdot b - ab$$

$$0 = 0 + 0\cdot b$$

$$\boxed{0 = 0\cdot b}$$

Come verifico la legge di annullamento del prodotto?

$\boxed{a\cdot b = 0\ ,\quad a \neq 0}$ Sono le ipotesi

$$a \neq 0 \Longrightarrow \underset{\text{esiste}}{\exists}\ a^{-1} = \frac{1}{a}$$ il reciproco di a

$$a^{-1}\,(a\cdot b) = a^{-1}\cdot 0$$

$\Updownarrow$ ASSORBIMENTO:

$$\underbrace{(a^{-1}\cdot a)}_{\text{reciproco}}\cdot b = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{1}_{\text{unità}}\cdot b = 0$$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{b = 0 \quad \text{è la tesi}}$

PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO:

in $\mathbb{Q}$ è definito un ordinamento:

se $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e n, q sono numeri interi positivi (m, p interi qualunque)

$$\frac{m}{n} \le \frac{p}{q} \iff q \cdot m \le p n$$

Es. $\frac{1}{n} \le \frac{p}{1} = p$ se $p > 0$ e $n > 0$

$-\frac{7}{2} < \frac{1}{100}$

$\frac{2^7}{3^4} > \frac{3}{2}$ ma $\frac{2^7}{-3^4} \overset{?}{\underset{<}{>}} -\frac{3}{2}$ NO!

Per esso valgono le proprietà

O1 riflessiva: $\forall a \in \mathbb{Q}$: $a \le a$

O2 antisimmetrica: $\forall a, b \in \mathbb{Q}$: $a \le b$ e $b \le a \Rightarrow a = b$

O3 transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a \le b$ e $b \le c \Rightarrow a \le c$

Inoltre tale ordinamento è compatibile con la struttura algebrica:

C1 $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$

C2 $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, $\boxed{c > 0}$: $a \le b \Rightarrow ac \le bc$

O4 Ed è un ordinamento totale, cioè

$\forall a, b \in \mathbb{Q}$ con $a \ne b$ si ha o $a < b$
o $b < a$.

VEDI a pag R2.1 un ordinamento non totale.

Insieme dei razionali > 0 ...

Non tutti gli ordinamenti sono totali.

Ad es.

la relazione di <u>inclusione</u> tra i sottoinsiemi di un insieme dato è una relazione d'ordine NON TOTALE.

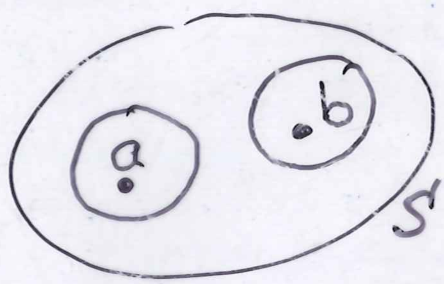
Infatti, ad es. l'insieme $S = \{a, b\}$ ha come sottoinsiemi, oltre a S e ϕ (insieme vuoto) anche $\{a\}$ e $\{b\}$

Si ha

$$\phi \subseteq \{a\} \subseteq S$$

$$\phi \subseteq \{b\} \subseteq S$$

ma non posso confrontare $\{a\}$ con $\{b\}$: nessuno dei due contiene l'altro.



Conseguenze della compatibilità

C1 $\Rightarrow$ $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$ (C3)

C2 $\Rightarrow$ $a \leq b$ e $c < 0 \Rightarrow bc \leq ac$ (C2.1)

$\left.\begin{array}{l} a,b \text{ di segno concorde} \\ a < b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (C2.2)

$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

ESERCIZI

$\forall a \in \mathbb{Q} \quad a^2 \geq 0$

$\forall a,b \in \mathbb{Q} \quad 2ab \leq a^2+b^2$

PROPRIETÀ ARCHIMEDEA: *

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$ con $0 < b < a$ $\exists n$ intero positivo t.c. $nb > a$

PROPRIETÀ DI DENSITÀ *

per ogni intero positivo fissato q e per ogni $a \in \mathbb{Q}$ esiste un intero p tale che

$$\frac{p}{q} \leq a < \frac{p+1}{q}$$

Differenza rispetto agli interi.

* Geometricamente ...

VERIFICO C3

IPOTESI: $\boxed{a \le b}$ Sommo $(-a)$ a entrambi i membri (uso C1)

$$a+(-a) \le b+(-a) = b-a$$

DEF di ZERO e OPPOSTO $\rightarrow \underset{0}{\parallel}$

Sommo $(-b)$ a entrambi i membri

$$0+(-b) \le b-a+(-b) \underset{\text{prop. comm.}}{=} b+(-b)-a \underset{\text{def di zero e opposto}}{=} 0-a$$

CIOÈ $\boxed{-b \le -a}$ TESI!

VERIFICO C2.1

IPOTESI: $\boxed{a \le b \text{ e } c<0}$ Allora $c=-|c|$

poiché $|c|>0$, per C2 $\Downarrow$

$$a\cdot|c| \le b\cdot|c|$$

per C3 $\Downarrow$

$$-(a\cdot|c|) \ge -(b\cdot|c|)$$

$$\Updownarrow$$

$$a(-|c|) \ge b(-|c|)$$ cioè $\boxed{ac \ge bc}$ TESI!

Ne segue che si deve stare attenti a NON moltiplicare i 2 membri di una disequazione per una quantità che può cambiare segno. ESEMPIO

$\dfrac{2x+1}{3x-4} \ge 1$ non può essere risolta moltiplicando per il denominatore poiché $3x-4$ cambia segno

Invece posso scrivere equivalentemente

$$\frac{2x+1}{3x-4}-1 \ge 0 \iff \frac{2x+1-3x+4}{3x-4} \ge 0 \iff \frac{-x+5}{3x-4} \ge 0$$

$$\iff \begin{cases} -x+5 \ge 0 \\ 3x-4>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -x+5<0 \\ 3x-4<0 \end{cases}$$

Il risultato sarà l'unione delle sol. dei 2 sistemi

Sol. I sist.: $\frac{4}{3} < x \le 5$; Sol. II sist.: $\emptyset$

$\Rightarrow$ sol. $\{x \in \mathbb{R} \mid 4/3 < x \le 5\}$

Come vedo anche con il grafico