Corrispondenza tra NUMERI RAZIONALI e ALLINEAMENTI DECIMALI ...

1) Ogni num. razionale è rappresentato da una frazione (o meglio: da una qualunque delle infinite frazioni tra loro equivalenti. Ad es. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots = \frac{n}{2n} = \dots$ con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ rappresentano tutte lo stesso numero razionale)

2) Il significato di una frazione $\frac{n}{d}$ ($n, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$) è ... divido il numeratore per il denominatore. Se n è un MULTIPLO INTERO di d si ha un numero intero. Altrimenti:

2A) se d è prodotto di potenze di 2 e di 5 "la divisione produce un numero decimale limitato".

Che cosa nasconde questa affermazione?

Che abbiamo deciso di rappresentare i numeri interi e i razionali in BASE $10 = 2 \cdot 5$

Esercizio: adattare i ragionamenti al caso in cui si scelga come BASE 2.

Perché è vera l'affermazione?

Iniziamo da esempi:

$\frac{3}{2} = \frac{30}{2} \cdot \frac{1}{10} = 15 \cdot \frac{1}{10}$ ---> $\boxed{1} , \boxed{5}$

nel numeratore l'ultima cifra a destra rappresenta i DECIMI

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{10^3}$ ---> $\boxed{0} , \boxed{1}\boxed{2}\boxed{5}$

nel numeratore l'ultima cifra a destra rappresenta i MILLESIMI

$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{5}{10^2}$ ---> $\boxed{0} , \boxed{0}\boxed{5}$

Q2

IN GENERALE, se $k \in \mathbb{Z}$ e $p, q \in \mathbb{N}$ (ove penso anche $0 \in \mathbb{N}$)

$$\frac{k}{2^p 5^q} = \frac{k \cdot 2^q \cdot 5^p}{2^{p+q} \cdot 5^{p+q}} = \frac{k \cdot 2^q \cdot 5^p}{10^{p+q}}$$

e, nel decimale, l'ultima cifra a destra del numeratore deve essere posta $p+q$ posti dopo la virgola.

Come visto nell'ultimo esempio in realtà basta moltiplicare il numeratore: $\begin{cases} \text{per } 5^{p-q} & \text{se } p>q \\ \text{per } 2^{q-p} & \text{se } p<q \end{cases}$

... ma la formula scritta sopra è "più facile".

2B) Se il denominatore d della frazione $\frac{n}{d}$, una volta ridotta ai minimi termini, contiene fattori diversi da 2 e 5 "la divisione produce un <u>numero</u> <u>decimale</u> <u>illimitato</u> <u>periodico</u>".

Esempio: $\frac{1}{3} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{10} = 3 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{30} =$

$$= 0{,}3 + \frac{1}{30}$$ E ADESSO?

$$\frac{1}{30} = \frac{100}{30} \cdot \frac{1}{10^2} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{10^2} = 3 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{300}$$

cioè $\frac{1}{3} = 0{,}3 + 0{,}03 + \frac{1}{300} = 0{,}33 + \frac{1}{300}$

e così via all'infinito...

SCRIVO $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ per indicare che ogni approssimazione successiva di $\frac{1}{3}$ con un decimale deve contenere "un 3 in più".

Che il risultato sia illimitato si capisce (il numeratore non ha tra i suoi fattori tutti quelli del denominatore e usando come BASE 10 posso giocare solo su prodotti per 2 e per 5, non per 3) ma <u>perché</u> <u>periodico</u>?

L'algoritmo della divisione tra interi dice che:
se $n, d \in \mathbb{Z}$ e $d \neq 0$ esistono e sono unici

- il quoziente q
- il resto r

della divisione di n per d e il RESTO r È TALE CHE $\boxed{0 \leq r < d}$.

Quindi dopo al più $(d-1)$ passi il resto si ripete! E a quel punto nelle successive divisioni si ripresentano le stesse cifre.

ESEMPIO : $\frac{1}{7} = ?$

PRIMA ABBIAMO SPIEGATO PASSO PASSO CHE COSA C'È DIETRO IL METODO DI CALCOLO di $1/3$ APPRESO ALLA SCUOLA DELL'OBBLIGO. ORA USO DIRETTAMENTE IL METODO :

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 7 \\ \cline{2-2}
10 & 0,142857\ldots \\
30 & \\
20 & \\
60 & \\
40 & \\
50 & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
1 &= 0\cdot 7 + 1 \\
10 &= 1\cdot 7 + 3 \\
30 &= 4\cdot 7 + 2 \\
20 &= 2\cdot 7 + 6 \\
60 &= 8\cdot 7 + 4 \\
40 &= 5\cdot 7 + 5 \\
50 &= 7\cdot 7 + 1
\end{aligned}
$$

In questo caso servono esattamente 6 passi per arrivare a ripetere il primo resto : 1.
Quindi il "periodo è lungo 6" e SCRIVO

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}.$$

3) Quindi di ogni numero razionale posso dare una rappresentazione decimale che potrà essere limitata (eventualmente senza cifre dopo la virgola) o illimitata ma periodica.

<u>È vero anche il viceversa?</u>

3 A) Se parto da un decimale limitato è chiaro come associargli una frazione e quindi un numero razionale:

Esempio:

$$0,375 = \frac{375}{10^3} = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$$

3 B) Se parto da un decimale illimitato periodico posso ragionare come in questo esempio:

cerco il numero razionale x tale che $x = 0,\overline{35}$.

Poiché il periodo è lungo 2

$$10^2 x = 35,\overline{35}$$

Quindi

$$100x - x = 35,\overline{35} - 0,\overline{35}$$

da cui

$$99x = 35$$

cioè $\quad x = \frac{35}{99}$

Regoletta: costruisco la frazione mettendo le cifre del periodo al numeratore e dividendo per un numero che ha tante cifre uguali a 9 quanto è la lunghezza del periodo.

E se c'è l'antiperiodo?

$x = 2,4\overline{35}$?

$$x = 2,4 + 0,0\overline{35} = \frac{24}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0,\overline{35} = \frac{24}{10} + \frac{35}{990} =$$

$$= \frac{24 \cdot 99 + 35}{990}$$

Altra regola che non enuncio: così è PIÙ FACILE!

Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra numeri razionali e allineamenti decimali limitati o illimitati periodici?

... Quasi!

PROBLEMA

$x = 0,\overline{9} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{9} = 1$

cioè il numero razionale 1 può essere rappresentato tanto dall'allineamento decimale 1 che dall'allineamento decimale $0,\overline{9}$.

Analogamente : $31,2\overline{9} = 31,3$ ecc.

Per eliminare questa anomalia si conviene di identificare queste scritture, cioè - in sostanza - di non usare mai rappresentazioni decimali in cui compaia il periodo $\overline{9}$ e di usare invece quelle corrispondenti in cui

il decimale immediatamente precedente il periodo è aumentato di 1.

ATTENZIONE : non userò $0,1\overline{9}$ bensì $0,2$

ma $0,\overline{19} = \frac{19}{99}$ ... cioè il periodo cui si fa riferimento nella frase precedente DEVE CONTENERE SOLO LA CIFRA 9 !

Se ne contiene altre il problema non si pone.

Ciò posto, possiamo identificare i razionali con gli allineamenti decimali limitati o illimitati periodici.