

# Corrispondenza tra NUMERI RAZIONALI e ALLINEAMENTI DECIMALI ...

Q1

- 1) Ogni num. razionale è rappresentato da una frazione (o meglio: da una qualunque delle infinite frazioni tra loro equivalenti. Ad es.  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots = \frac{n}{2n} = \dots$  con  $n \in \mathbb{Z}$  rappresentano tutte lo stesso numero razionale)
- 2) Il significato di una frazione  $\frac{n}{d}$  ( $n, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$ ) è ... divido il numeratore per il denominatore. Se  $n$  è un MULTIPLO INTERO di  $d$  si fa un numero intero. Altrimenti:

2A) se  $d$  è prodotto di potenze di 2 e di 5 "la divisione produce un numero decimale limitato".

Che cosa nasconde questa affermazione?

Che abbiamo deciso di rappresentare i numeri interi e i razionali in BASE  $10 = 2 \cdot 5$

Esercizio: adattare i ragionamenti al caso in cui si scelga come BASE 2.

Perché è vera l'affermazione?

Iniziamo da esempi:

$$\frac{3}{2} = \frac{30}{2} \cdot \frac{1}{10} = 15 \cdot \frac{1}{10} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

nel numeratore  
l'ultima cifra a destra rappresenta i DECIMI

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{10^3} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

nel numeratore  
l'ultima cifra a destra rappresenta i MILLESIMI

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{5}{10^2} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

QR

IN GENERALE, se  $k \in \mathbb{Z}$  e  $p, q \in \mathbb{N}$  (ove possono anche  $0 \in \mathbb{N}$ )

$$\frac{k}{2^p 5^q} = \frac{k \cdot 2^{q-p} \cdot 5^p}{2^{p+q} \cdot 5^{p+q}} = \frac{k \cdot 2^{q-p} \cdot 5^p}{10^{p+q}}$$

e, nel decimale, l'ultima cifra a destra del numeratore deve essere posta  $p+q$  posti dopo la virgola.

Come visto nell'ultimo esempio in realtà basta moltiplicare il numeratore:  $\left. \begin{array}{l} \text{per } 5^{p-q} \text{ se } p > q \\ \text{per } 2^{q-p} \text{ se } p < q \end{array} \right\}$

... ma la formula scritta sopra è "più facile".

2B) Se il denominatore  $d$  della frazione  $\frac{n}{d}$ , una volta ridotta ai minimi termini, contiene fattori diversi da 2 e 5 "la divisione produce un numero decimale illimitato periodico".

Esempio:  $\frac{1}{3} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10} = (3 + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{10} = 3 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = 0,3 + \frac{1}{30}$  **E ADESSO?**

$$\frac{1}{30} = \frac{100}{30} \cdot \frac{1}{10^2} = (3 + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{10^2} = 3 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{300}$$

cioè  $\frac{1}{3} = 0,3 + 0,03 + \frac{1}{300} = 0,33 + \frac{1}{300}$

e così via all'infinito...

SCRIVO  $\frac{1}{3} = 0, \overline{3}$  per indicare che ogni approssimazione successiva di  $\frac{1}{3}$  con un decimale deve contenere "un 3 in più".

Che il risultato sia illimitato si capisce (il numeratore non ha tra i suoi fattori tutti quelli del denominatore e usando come BASE 10 posso giocare solo su prodotti per 2 e per 5, non per 3) ma perché periodico?



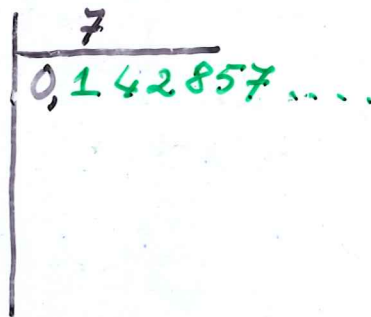
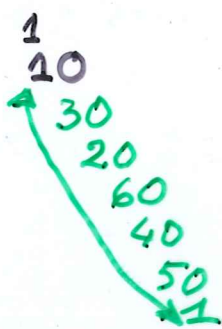
L' algoritmo della divisione tra interi dice che: se  $n, d \in \mathbb{Z}$  e  $d \neq 0$  esistono e sono unici

- il quoziente  $q$
- il resto  $r$

della divisione di  $n$  per  $d$  e il RESTO  $r$  È TALE CHE  $0 \leq r < d$ .

Quindi dopo al più  $(d-1)$  passi il resto si ripete! E a quel punto nelle successive divisioni si ripresentano le stesse cifre.  
ESEMPIO:  $\frac{1}{7} = ?$

PRIMA ABBIAMO SPIEGATO PASSO PASSO CHE COSA C'È METRO IL METODO DI CALCOLO DI  $\frac{1}{3}$  APPRESO ALLA SCUOLA DELL'OBBLIGO. ORA USO DIRETTAMENTE IL METODO:



$$\begin{aligned}
 1 &= 0 \cdot 7 + 1 \\
 10 &= 1 \cdot 7 + 3 \\
 30 &= 4 \cdot 7 + 2 \\
 20 &= 2 \cdot 7 + 6 \\
 60 &= 8 \cdot 7 + 4 \\
 40 &= 5 \cdot 7 + 5 \\
 50 &= 7 \cdot 7 + 1
 \end{aligned}$$

In questo caso servono esattamente 6 passi per arrivare a ripetere il primo resto: 1.

Quindi il "periodo è lungo 6" e SCRIVO

$$\frac{1}{7} = 0, \overline{142857}$$

3) Quindi ogni numero razionale possedere una rappresentazione decimale che potrà essere limitata (eventualmente senza cifre dopo la virgola) o illimitata ma periodica. È vero anche il viceversa?

3 A) Se parto da un decimale limitato è chiaro come associargli una frazione e quindi un numero razionale:

Esempio:

$$0,375 = \frac{375}{10^3} = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$$

3 B) Se parto da un decimale illimitato periodico posso ragionare come in questo esempio:

cerco il numero razionale  $x$  tale che  $x = 0,3\overline{5}$ .

Poiché il periodo è lungo 2

$$10^2 x = 35,3\overline{5}$$

Quindi

$$100x - x = 35,3\overline{5} - 0,3\overline{5}$$

da cui

$$99x = 35$$

$$\text{Cioè } x = \frac{35}{99}$$

Regola: costruisco la frazione mettendo le cifre del periodo al numeratore e dividendo per un numero che ha tante cifre uguali a 9 quanto è la lunghezza del periodo.

E se c'è l'antiperiodo?

$$x = 2,4\overline{35} ?$$

$$x = 2,4 + 0,0\overline{35} = \frac{24}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0,3\overline{5} = \frac{24}{10} + \frac{35}{990} =$$

$$= \frac{24 \cdot 99 + 35}{990}$$

Altra regola che non ricordo: COSÌ  
È PIÙ FACILE!



Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra numeri razionali e allineamenti decimali limitati o illimitati periodici?

... Quasi!

### PROBLEMA

$$x = 0, \overline{9} \Rightarrow x = \frac{9}{9} = 1$$

cioè il numero razionale 1 può essere rappresentato tanto dall'allineamento decimale 1 che dall'allineamento decimale  $0, \overline{9}$ .

Analogamente:  $31, 2\overline{9} = 31, 3$  ecc.

Per eliminare questa anomalia si conviene di identificare queste scritture, cioè - in sostanza - di non usare mai rappresentazioni decimali in cui compare il periodo  $\overline{9}$  e di usare invece quelle corrispondenti in cui

il decimale immediatamente precedente il periodo è aumentato di 1.

ATTENZIONE: non userei  $0, 1\overline{9}$  bensì  $0, 2$  ma  $0, 1\overline{9} = \frac{19}{99}$  ... cioè il periodo cui si fa riferimento nella frase precedente

DEVE CONTENERE SOLO LA CIFRA 9!

Se ne contiene altre il problema non si pone.

Ciò posto, possiamo identificare i razionali con gli allineamenti decimali limitati o illimitati periodici.