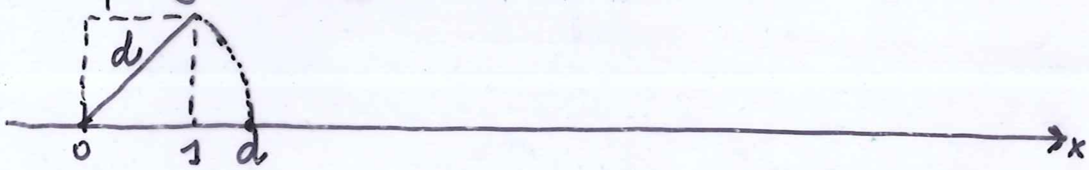
Illustrazione geometrica della proprietà di densità

Posso inscatolare $\frac{1}{3}$ in intervalli di ampiezza piccola quanto voglio ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$ ecc.).

Problema che origina dal fatto (dimostrato sulla pag. successiva) che $\sqrt{2}$ non è razionale:



Il punto di ascissa d è un punto della retta (ho riportato su di essa il secondo estremo della diagonale del quadrato di lato 1) ma la sua ascissa non è razionale $\Rightarrow$ ci sono punti sulla retta che non sono rappresentati da numeri razionali.

Penso ai punti della retta come numeri (identificandoli con le loro ascisse) e chiamo ciascuno di questi punti numero reale. Cioè l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ "è" l'insieme dei punti della retta:

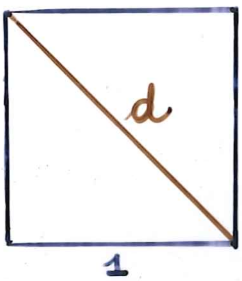
- alcuni di questi sono RAZIONALI
- altri sono IRRAZIONALI e di questi
  - alcuni sono ALGEBRICI (soluzioni di eq. di tipo "polinomio in x" $= 0$) ad es. $\sqrt{2}$
  - altri non lo sono: si dicono TRASCENDENTI ad es. $\pi = \frac{\text{lungh. circonf}}{\text{lungh. diam.}}$

IL PROBLEMA DEI NUMERI REALI.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}$ nascono come ampliamenti successivi di $\mathbb{N}$ conseguenti a pure richieste algebriche (che esprimono esigenze concrete ....).
Invece i NUMERI REALI ($\mathbb{R}$) vengono introdotti in risposta a quesiti alcuni dei quali possono essere tradotti algebricamente, altri no.

ESEMPI.

1. Se un quadrato ha il lato lungo 1 (rispetto ad un'unità di misura prefissata) qual è la lunghezza d della sua diagonale?



Il teor. di Pitagora permette una espressione algebrica del problema:

(*) $\quad d^2 = 1+1 = 2$

Si dirà che d (soluzione di un'eq. algebrica) è un NUMERO ALGEBRICO.
Ma nessun numero razionale $\frac{p}{q}$ soddisfa la (*)!

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO.

$d = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$ con p e q interi primi tra loro

$\Downarrow$

$2q^2 = p^2$

$\Downarrow$

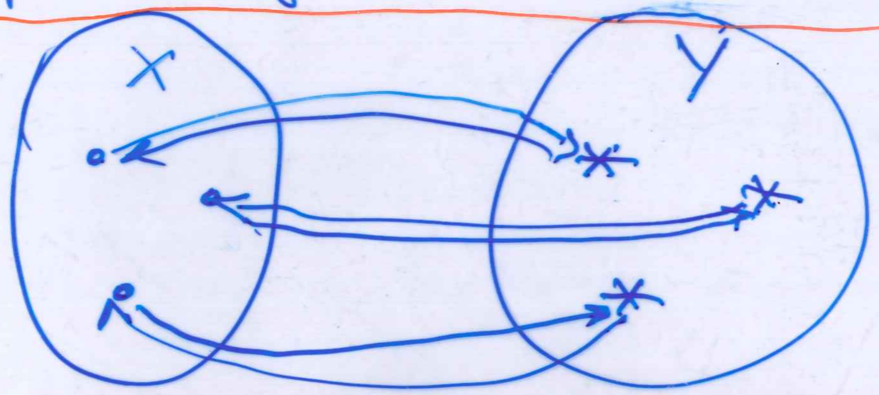
2 divide p : $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ 2 divide q

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$

$2q^2 = 4k^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2$

assurdo

Un altro modello che richiama la necessità di introdurre "nuovi numeri" diversi dai razionali è quello degli allineamenti decimali



Corrispondenza BIUNIVOCA o $1 \longleftrightarrow 1$

a ogni $x \in X$ associo 1 e 1 solo $y \in Y$ e da ogni $y \in Y$ posso tornare indietro a un solo $x \in X$.

Nel finito vuol dire che X e Y hanno lo stesso numero di elementi. Nell'infinito... $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$; albergo di Hilbert... stranezze!

Si sa che i numeri razionali sono in corrispondenza "quasi" biunivoca con gli allineamenti decimali limitati o illimitati periodici (VEDI SLIDES CON TALE TITOLO)

$0,\overline{9}$

$\boxed{x = 0,\overline{9}}$

$10x = 9,\overline{9}$

$9x = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} = 9$

$\boxed{x = 1,0}$

ALLORA: NON SI USA MAI $0,\overline{9}$ e al posto di $1,0\overline{9}$ si scrive 1,1 ecc.

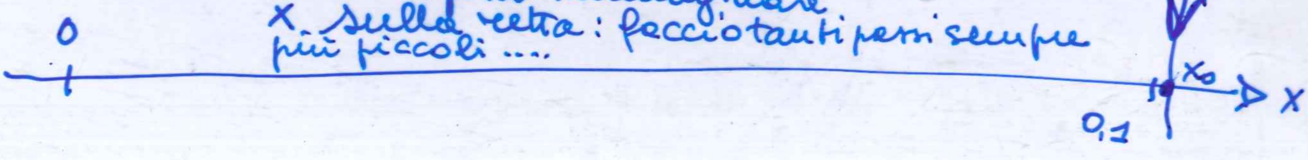
ma l'allineamento decimale

$x_0 = 0,101001000100001\ldots$

TANTI ZERI QUANTI SONO GLI 1 precedenti

è decimale illimitato non periodico $\longrightarrow x_0 \notin \mathbb{Q}$

ma mi posso immaginare x_0 sulla retta: faccio tanti passi sempre più piccoli ....



Problema di $\sqrt{2}$

(geometricamente) problema dei punti della retta non rappresentati da numeri razionali

Soluzione: ampliamento del CAMPO ORDINATO ARCHIMEDEO $\mathbb{Q}$

Dal punto di vista dell'insieme di numeri: prendo

ogni allineamento decimale
- limitato o non limitato
- periodico o $\underbrace{\text{non periodico}}_{\text{IRRAZIONALI}}$

(ATTENZIONE alle necessarie identificazioni:

$$0.\bar{9} = \dots$$)

E' uno dei tanti MODELLI dell'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sono def. $+, \cdot, \leq$ e godono delle proprietà viste in $\mathbb{Q}$.

<u>In più</u>

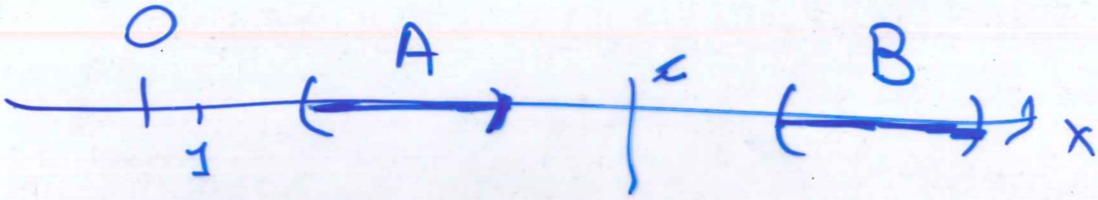
COMPLETEZZA: dati comunque due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}$ t.c.

$$\forall a \in A \,,\, \forall b \in B \quad \text{risulti } a \leq b$$

ESISTE ALMENO un numero reale c t.c.

$$a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A \,,\, \forall b \in B$$

ES.1



A e B sono separati

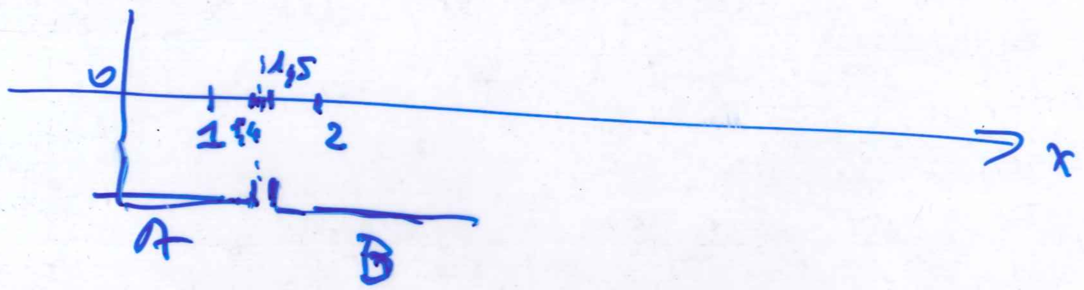
e ogni punto c t.c. $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \; \forall b \in B$

è un possibile elemento separatore.

ES.2

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2 \} \quad \rightarrow c = \sqrt{2}$$



L'assioma di completezza vale nei RAZIONALI?

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2 \}$$

l'unico separatore è $\sqrt{2}$ che non sta in $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato archimedeo completo

Controesempio su $\mathbb{Q}$.

Perché ALMENO 1 ?

Condizione equivalente ? DEFINIZIONI

- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto limitato se esistono $l, L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad l \leq x \leq L$

- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto superiormente limitato se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad x \leq L$ ILLUSTRATO A PAG R6.1

- $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto inferiormente limitato se esiste $l \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E \quad l \leq x$

- $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo superiore (*) $\operatorname{Sup} E$ se
$\exists\, S = \operatorname{Sup} E \mid \forall x \in E$ risulta $x \leq \operatorname{Sup} E$ e
$\forall y \in \mathbb{R}$ $\{$t.c. $\forall x \in E$ risulti $x \leq y\} \Rightarrow \operatorname{Sup} E \leq y$

- $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo inferiore $\operatorname{Inf} E$ se
$\exists\, I = \operatorname{Inf} E \mid \forall x \in E$ risulta $I \leq x$ e
$\forall y \in \mathbb{R}$ t.c. $\{\forall x \in E$ risulti $y \leq x\} \Rightarrow y \leq I$

- M massimo di E (*)
Se esiste $\operatorname{Sup} E$ e $\operatorname{Sup} E \in E$ dico che $\operatorname{Sup} E$ è il massimo di E

- m minimo di E
Se $\operatorname{Inf} E$ esiste ed $\operatorname{Inf} E \in E$ dico che $\operatorname{Inf} E$ è il minimo di E

(*) Esempi e illustrazioni a pag R6.2

TERMINOLOGIA

Tra i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ alcuni rivestono particolare importanza ... tanto da meritare un nome

intervallo aperto di estremi a e b l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =: (a,b) =:]a,b[$$

intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} =: [a,b]$$

intervallo semiaperto a sinistra ...

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =: (a,b]$$

intervallo semiaperto a destra ....

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} =: [a,b)$$

Per analogia, anche gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =: (-\infty, a)$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} =: (-\infty, a]$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =: (a, +\infty)$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} =: [a, +\infty)$$

Commento sull'utilizzo a pag R6.1

saranno detti talora intervalli (illimitati).

Ogni intervallo aperto limitato contenente un numero x_0 sarà detto intorno di x_0. L'intervallo aperto limitato

$$U(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$

sarà detto intorno (di x_0) centrato in x_0 e di semiampiezza r.

Un numero x_0 sarà detto punto di accumulazione per un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se in ogni intorno di x_0 c'è almeno 1 elem. $\neq x_0$ di A. Ad es. $x_0 = a$ è punto di accumulazione per $A = (a, b)$.

Supponete di voler rappresentare le soluz. della diseq.:

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$ ... Sol. : $x \leq 1$ oppure $x \geq 2$

è ciò che siete abituati a scrivere: ma, avete solo sostituito 1 diseq. con 2 diseq.!

In modo corretto dovrei scrivere

Sol. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ o } x \geq 2\}$ = o con la TERMINOLOGIA degli INSIEMI

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ = con la terminologia degli intervalli BREVE, PRECISA e VISIVA!

$= (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

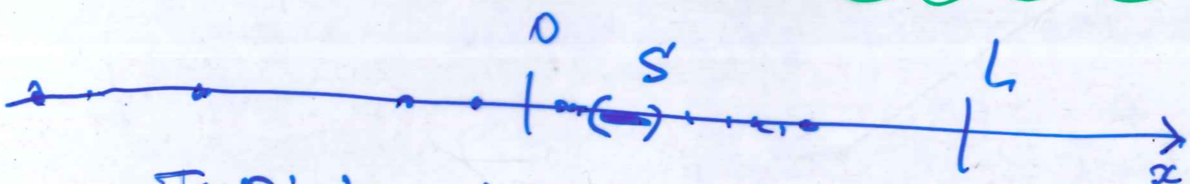
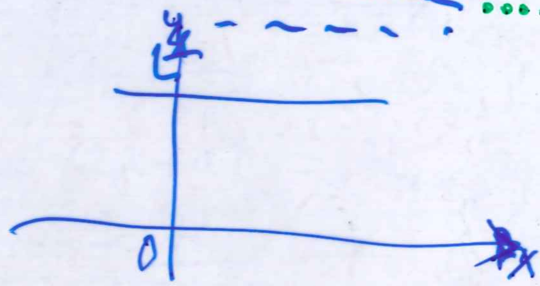


ILLUSTRAZIONE DI INSIEME SUPERIORMENTE LIMITATO

Tutti i punti dell'ins. S stanno a sinistra di L

$\Rightarrow$ è limitato "da destra" .... SUPERIORMENTE



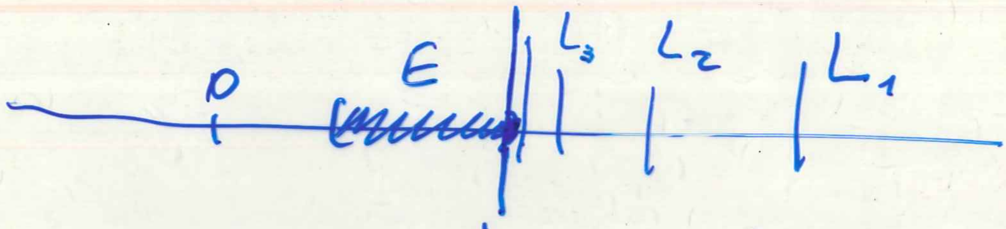
parlando di funzioni, l'insieme starà nell'asse y e "superiormente" si capirà di più

L è un MAGGIORANTE di un insieme S se $\forall x \in S$ risulta

$$x \leq L$$

l è un MINORANTE .. - . - . $\forall x \in S$

$$l \leq x$$



k non è più un maggiorante di E perché <u>esiste</u> almeno un $x \in E$ t.c. <u>$x > k$</u>

Ad es.:

$E = (1,2)$

Maggioranti ad es. sono

$L_1 = 4$

$L_2 = 2,5$

$L_3 = 2,1$

$L = 2$. Invece ad es.

$k = 2 - 10^{-1.000.000}$

non va bene come maggiorante di E poiché $\frac{k+2}{2} \in E$ ed è $> k$

$2 = \operatorname{Sup} E$. Poiché $2 \notin E$ l'insieme E <u>non ha massimo</u>

$E_2 = (1, 2]$ $\qquad 2 = \operatorname{Sup} E \in E$

$= \operatorname{Max} E$

ESEMPI su estremi superiori e inferiori.
trovare (se esistono) $\inf E$, $\sup E$, $\min E$, $\max E$

$E = [1, 3)$

$E = \mathbb{N}$

$E = \mathbb{Z}$

$E = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$

$E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 8 \}$

TEOR. dell'ESTREMO SUPERIORE (INFERIORE).

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente limitato e non vuoto allora E ammette estremo superiore

questa condizione (ogni s.i. superiormente limitato ha estremo superiore) EQUIVALE alla COMPLETEZZA

Permette di dire che in $\mathbb{R}$ esiste $\sqrt{2}$ e più in generale che

(ESISTENZA DELLE RADICI n-ESIME ARITMETICHE)

$\forall y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ e $\forall n \geq 1$ esiste 1 e 1 sol numero reale positivo x t.c.

$$x^n = y$$

x viene denotato con $\sqrt[n]{y}$

$\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\} = E$. In $\mathbb{R}$

$\sup E = \sqrt{2}$

In $\mathbb{Q}$ $\quad \forall x \in E \quad$ $x < 2$

$x < 1{,}5$

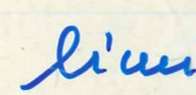
$x < 1.42$

$x < 1.415$

$\vdots$

esistono infiniti maggioranti di E
ciascuno $<$ del precedente
ma non trovo in $\mathbb{Q}$ il + piccolo maggiorante

L'assioma di completezza nella forma dell'esistenza del Sup di un insieme non vuoto superiorm. limitato serve a provare il



TEOREMA degli ZERI. In particolare:

$f(x) = x^2 - 2$, che è funzione continua, è tale che

$f(2) = 4 - 2 = 2 > 0$

$f(1) = 1 - 2 = -1 < 0$

$\overset{T.Z.}{\Rightarrow}$ esiste almeno un x_0 t.c.

$f(x_0) = 0$

cioè $\exists \sqrt{2}$